جمهورية العراق

وزارة التربية

المديرية العامة للتعليم المهني

الـــرياضــيات

الـثالث

الفرع الصناعي- فرع الحاسوب وتقنية المعلومات

المؤلفون

د. اياد غازي ناصر   د. طارق شعبان رجب   ثائرعبد العباس مطشر

مهند عبد الحمزة مرزا   فائزة خضير عباس الزبيدي   نظير حسن علي

الطبعة الخامسة

1442 هـ -2020 م

المقدمة

تعد المناهج أحد أهم حلقات العملية التربوية حيث أن للمناهج دور كبير في إيصال المعلومة إلى المتلقي (الطالب) وأن لتطوير المناهج العلمية دور أساسي مهم في تطوير مجمل العملية التعليمية كما ان التطور هو سمة الحياة الإنسانية المتجددة دوماً والعلم جزء من الحياة المتجددة لذلك لا بد أن تعكس المناهج التطورات الحديثة في مختلف ميادين الحياة حيث أن النمو المعرفي سريع جداً مما يحتم تحديث المناهج بصورة مستمرة وان عملية التحديث والتطوير هي عملية متكاملة.

وإدراكاً لكل هذه التحديات وحاجات قطاع التعليم المهني في العراق لتحسين جودة هذا التعليم في مختلف قنواته التعليمية تقوم شعبة المناهج في المديرية العامة للتعليم المهني بتنفيذ مبادرة طموحة تهدف إلى إحداث تغيير جوهري في مناهجها الدراسية ، تهدف هذه المبادرة في جانبها المتعلق بعلوم الرياضيات إلى إعداد الكتب الدراسية لمادة الرياضيات بما يتلاءم مع المعايير العالمية والنظريات التربوية الحديثة فضلاً عن رفع مستوى تحصيل طلاب التعليم المهني في مادة الرياضيات ليتسنى لهم منافسة أقرانهم من طلبة التعليم العام عن طريق إحداث نقلة نوعية في المناهج من حيث الإعداد العلمي وأسلوب العرض والربط مع التطبيقات الحياتية.

إن هذا الكتاب الذي بين أيديكم هو الكتاب الثالث لطلبة الفرع الصناعي وفرع الحاسوب وتقنية المعلومات في التعليم المهني وهو في ستة فصول يتناول الفصل الاول موضوع الاعداد المركبة فيما يتناول الفصل الثاني تكملة لما تعلمه الطالب في السنة السابقة في القطوع المخروطية والفصل الثالث فقد تناول التطبيقات على المشتقة تلاه الفصل الرابع الذي تضمن العملية العكسية للمشتقة وهو تكامل، والفصل الخامس الذي بحث في الهندسة الفراغية استكمالا لما درسه الطالب في الصف الثاني ، اما الفصل السادس فلقد تناولنا فيه نظرية الاحتمال.

لقد تم وضع هذا الكتاب وفقاً للأهداف المقررة ، وحاولنا ان نتبع عند تأليفه الطرق الحديثة فكان جهدنا منصباً على الشرح المفصل لكل مفرداته بما يقربها من الاذهان وتوخينا الاكثار من التمارين العملية التي يصادفها الطالب في حياته العملية. وهنا لا بد من الإشارة إلى الوقت المخصص لكل فصل والذي تم الاتفاق على ان يكون كالاتي وبمعدل ثلاث حصص في الاسبوع وما مجموعه (30 أسبوعاً).

الفصل الاول	سبعة أسابيع
الفصل الثاني	خمسة أسابيع
الفصل الثالث	خمسة أسابيع
الفصل الرابع	سبعة أسابيع
الفصل الخامس	ثلاثة أسابيع
الفصل السادس	ثلاثة أسابيع

وختاماً نستشهد بالمقولة الشهيرة التي يقول صاحبها (إني رأيت أنه لا يكتب أنسان كتاباً في يومه إلا قال في غده: لو غير هذا لكان أحسن، ولو زيد كذا لكان يستحسن، ولو قدم هذا لكان أفضل، ولو ترك هذا لكان أجمل، وهذا من أعظم العبر للإنسان، وهو دليل على استيلاء النقص على جملة البشر). آملين من اخواننا المدرسين أن يوافونا بملاحظاتهم بهدف التطوير والله الموفق.

المؤلفون

محتويات الكتاب

البند	الموضوع	الصفحة
	الفصل الاول	
	الاعداد المركبة	
1-1	إظهار الحاجة إلى مزيد من الأعداد	9
2-1	تعريف العدد المركب	9
3-1	قوى (i)	10
4-1	جبر الأعداد المركبة	12
5-1	حل المعادلات في حقل الأعداد المركبة	27
6-1	التمثيل الهندسي للإعداد المركبة	31
7-1	الصيغة القطبية للإعداد المركبة	35
	الفصل الثاني	
	القطوع المخروطية	
1-2	القطوع المخروطية (مراجعة)	45
2-2	القطع المكافئ	46
3-2	القطع الناقص	60
4-2	القطع الزائد	70
	الفصل الثالث	
	تطبيقات على المشتقة	
1-3	مراجعة في قواعد إيجاد المشتقة	80
2-3	استخدام المشتقة في التقريب	80
3-3	النقاط الحرجة للدالة ومناطق التزايد والتناقص	85
4-3	النهايات العظمى والصغرى المحلية (النسبية)	87
5-3	نقاط الانقلاب ومناطق التحدب والتقعر للدالة	91
6-3	رسم الدوال الحقيقية	94
7-3	تطبيقات عملية على النهايات العظمى والصغرى	100

البند	الموضوع	الصفحة
	الفصل الرابع	
	التكامل	
1-4	مفاهيم عامة	107
2-4	الدالة المقابلة	108
3-4	التكامل غير المحدد	110
4-4	تطبيقات على التكامل غير المحدد	120
5-4	التكامل المحدد	126
6-4	إيجاد مساحة منطقة مستوية باستخدام التكامل المحدد	134
7-4	التطبيق الفيزياوي للتكامل المحدد(الإزاحة- المسافة)	139
	الفصل الخامس	
	الهندسة الفراغية	
1-5	تمهيد	144
2-5	الزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة	144
3-5	المبرهنة السابعة ونتيجتها	147
4-5	المبرهنة الثامنة	148
5-5	المبرهنة التاسعة ونتيجتها	149
6-5	الإسقاط العمودي على المستوي	153
	الفصل السادس	
	نظرية الاحتمالات	
1-6	تعاريف ومصطلحات	160
2-6	إيجاد عدد طرق وقوع الأحداث باستخدام التباديل والتوافيق	165
3-6	إيجاد عدد طرق سحب عينة من مجتمع مع الارجاع وبدونه وبالترتيب وبدونه	168
4-6	نسبة الاحتمال	171

بعض المختصرات والرموز المستعملة في الكتاب

$L.H.S = left\ hand\ side$:الطرف الايسر

$R.H.S = right\ hand\ side$:الطرف الايمن

$S.s = solution\ set$:مجموعة الحل

$x - axis$: المحور الأفقي

$y - axis$:المحور العمودي

$\mathbb{C}$: مجموعة الاعداد المركبة

$\mathbb{R}$:مجموعة الاعداد الحقيقية

$\mathbb{Q}$:مجموعة الأعداد النسبية

$\mathbb{Z}$:مجموعة الأعداد الصحيحة

$\mathbb{N}$: مجموعة الاعداد الطبيعية

$\forall$: لكل

$\exists$: يوجد على الاقل

$\in$: ينتمي

s: الإزاحة

t: الزمن

v: السرعة

a: التعجيل

m : الميل

$f(x)$: الدالة

Δx : التغير في قيمة x

$\lim\limits_{x \to a}$: الغاية عندما تقترب x من a

$\frac{dy}{dx}, y', f'(x)$: المشتقة الأولى

$\frac{d^2y}{dx^2}, y'', f''(x)$: المشتقة الثانية

$\int dx$: التكامل بالنسبة للمتغير x

الفصل الأول

الأعداد المركبة (complex numbers)

الأهداف السلوكية:

ينبغي للطالب في نهاية هذا الفصل ان يكون قادراً على ان :

1. يدرك الحاجة إلى التوسع في مفهوم الأعداد بسبب وجود عدد من المعادلات التي يقتضي إيجاد جذورها استحداث مجموعة عددية جديدة أكبر من مجموعة الأعداد الحقيقية.
2. يتعرف على الجزء التخيلي والتعبير عنه بصيغة ai حيث a عدد حقيقي و i تمثل الجذر التربيعي للعدد $(1-)$.
3. يتعرف على كيفية جمع الأعداد المركبة.
4. يتعرف على مفهوم النظير الجمعي للعدد المركب ومنه كيفية طرح الأعداد المركبة.
5. يتعرف على كيفية ضرب الأعداد المركبة.
6. يتعرف على مفهوم المرافق للعدد المركب ومنه كيفية قسمة الأعداد المركبة.
7. يتعرف على مفهوم تساوي عددين مركبين ومنه كيفية حل المعادلات التي تحتوي أعدادا مركبة.
8. يتعرف على كيفية استخراج الجذرين التربيعيين للعدد المركب.
9. يتعرف على كيفية حل المعادلات ضمن حقل الأعداد المركبة.
10. يتمكن من إيجاد المعادلة التربيعية التي علم جذريها المركبين.
11. يتعرف على (مستوي كاوس) ويتمكن من تمثيل الأعداد المركبة عليه.
12. يتعرف على مفهوم مقياس العدد المركب والقيمة الأساسية لسعته ومفهوم سعة العدد المركب ويتمكن من إيجادهما لأي عدد مركب.
13. يتمكن من التعبير عن العدد المركب بصيغة أويلر (الصيغة القطبية).

الفصل الأول

الأعداد المركبة (complex numbers)

المحتوى العلمي

1-1 إظهار الحاجة إلى مزيد من الأعداد

2-1 تعريف العدد المركب

3-1 قوى (i)

4-1 جبر الأعداد المركبة

1-4-1 جمع الأعداد المركبة

2-4-1 طرح الأعداد المركبة

3-4-1 ضرب الأعداد المركبة

4-4-1 مفهوم مرافق العدد المركب

5-4-1 قسمة الأعداد المركبة

6-4-1 تحليل العدد الحقيقي إلى عاملين مركبين

7-4-1 تساوي عددين مركبين

8-4-1 إيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب

5-1 حل المعادلات في حقل الأعداد المركبة

6-1 التمثيل الهندسي للأعداد المركبة

7-1 الصيغة القطبية للعدد المركب

1-7-1 المقياس والسعة للعدد المركب

2-7-1 التعبير عن العدد المركب بالصيغة القطبية (صيغة أويلر)

الفصل الأول

الأعداد المركبة (complex numbers)

1-1 إظهار الحاجة إلى مزيد من الأعداد

عبر مختلف العصور عمد علماء الرياضيات إلى تقديم مجموعات عددية مختلفة. حيث أنشأت في أول الأمر مجموعة الأعداد الطبيعية (أعداد العد) والتي رمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ وهو الحرف الاول من كلمة Natural وتعني (طبيعي) لحل المعادلات التي بالصيغة $x + a = b$ حيث $a < b$.
لما كانت بعض المعادلات من الشكل $x + a = b$ حيث $a > b$ مستحيلة الحل في البنية الرياضية $(\mathbb{N}, +)$ كالمعادلة $(x + 7 = 3)$ فلقد أستحدث الباحثون مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ حيث $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ باضافة الأعداد السالبة إلى مجموعة الأعداد الطبيعية فأصبح حل هذه المعادلة ممكناً في البنية الرياضية$(\mathbb{Z}, +)$ وحلها هو $x = (-7) + 3 = -4$ ، ولما كانت بعض المعادلات من الشكل الخطي أي: $ax = b$ مستحيلة الحل في البنية الرياضية $(\mathbb{Z}, +)$ كالمعادلة $3x = 5$ فلقد استحدث الباحثون مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ حيث $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ والتي يكون حل هذه المعادلة فيهاهو $x = \frac{5}{3}$ ، ولما كانت بعض المعادلات من الشكل $x^2 = 3$ مستحيله الحل في البنية الرياضية $(\mathbb{Q}, \times)$ فلقد أستحدث الباحثون مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ حيث $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ بحيث تكون مجموعةحل المعادلة $x^2 = 3$ فيها هي المجموعة $\{-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\}$، مع ذلك بقيت المعادلات من الشكل $x^2 = -a : a \in \mathbb{R}, a > 0$ بدون حل كالمعادلة $x^2 = -1$ ولقد قدم العالم السويسري (اويلر) ما سمي بالوحدة التخيلية (i) للدلالة على الجذرين التربيعيين للعدد الحقيقي (-1)الامر الذي مهد لظهور مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ حيث $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ والتي يكون حل المعادلة $x^2 = -1$ فيها هو $\{-i, +i\}$على يد العالم الألماني (كاوس) والذي له الفضل بوضع تعريف العدد المركب كعـدد بالصيغـــــــة $(a + bi)$
حيث : $a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}$.

2-1 تعريف العدد المركب

يطلق على العدد بالصيغة $(a + bi)$حيث : $a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}$ بالعدد المركب ويسمى الجزء a بالجزء الحقيقي للعدد المركب ويسمى الجزء b بالجزء التخيلي للعدد المركب وتسمى الصيغـــة $(a + bi)$ بالصيغة الجبرية (الاعتيادية) للعدد المركب. كما تسمى المجموعة :

$$\mathbb{C} = \{a + bi: a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

بمجموعة الأعداد المركبة وهي كما بيّنا في البند السابق تمثل المجموعة الأوسع للأعداد وتكون مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مجموعة جزئية منها حيث $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

مثال 1) : انظر للأعداد المركبة الأتية

العدد المركب	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
$z = 3 + 2i$	$a = 3$	$b = 2$
$z = -2 + 5i$	$a = -2$	$b = 5$
$z = -1 - 4i$	$a = -1$	$b = -4$
$z = 5 = 5 + 0i$	$a = 5$	$b = 0$
$z = -2i = 0 - 2i$	$a = 0$	$b = -2$
$z = 0 = 0 + 0i$	$a = 0$	$b = 0$

3-1 قوى (i)

بما ان $i = \sqrt{-1}$ فان :

$$i^2 = i.i = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1 \Rightarrow \boxed{i^2 = -1}$$

$$i^3 = i^2.i = -1 \times i = -i \Rightarrow \boxed{i^3 = -i}$$

$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{i^4 = 1}$$

وبشكل عام فانه عند رفع (i) الى اس صحيح موجب فان الناتج يكون احد عناصر المجموعة $\{1, -1, i, -i\}$ وذلك عن طريق قسمة الأس على العدد 4 واعتبار باقي القسمة هو الأس الجديد .

والأمثلة الأتية توضح ذلك :

مثال 2) : بسط ما يأتي إلى ابسط صورة : i^{23} , i^{37} , i^{62} , i^{28}

الحل:

- $i^{28} = i^0 = 1$ (العدد 28 يقبل القسمة على 4 بدون باق أي ان الباقي هو 0)
- $i^{62} = i^2 = -1$ (العدد 62 يقبل القسمة على 4 وباقي القسمة هو2)
- $i^{37} = i^1 = i$ (العدد 37 يقبل القسمة على 4 وباقي القسمة هو1)
- $i^{23} = i^3 = -i$ (العدد 23 يقبل القسمة على 4 وباقي القسمة هو3)

مثال 3) : بسط العدد (i^{12n+3}) إلى ابسط صورة :

الحل :

$$\begin{aligned} i^{12n+3} &= i^{12n} \times i^3 \\ &= (i^4)^{3n} \times i^3 \\ &= (1)^{3n} \times (-i) \\ &= 1 \times (-i) \\ &= -i \\ &= 0 - i \end{aligned}$$

ملاحظة : يترتب على كون $i = \sqrt{-1}$ اننا نستطيع التعبير عن الجذر التربيعي لأي عدد سالب بدلالة i وفقاً للقاعدة الأتية :

$$\boxed{\sqrt{-a} = \sqrt{a}\, i \qquad \forall a \in \mathbb{R}, a > 0}$$

مثال 4) : عبر عن الجذور السالبة الأتية بدلالة i

$$\sqrt{-9} \quad , \quad \sqrt{-100} \, , \quad \sqrt{-7} \quad , \sqrt{-20}$$

الحل: -

- $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \times (-1)} = \sqrt{9} \times \sqrt{-1} = 3i$
- $\sqrt{-100} = \sqrt{100 \times (-1)} = \sqrt{100} \times \sqrt{-1} = 10i$
- $\sqrt{-7} = \sqrt{7 \times (-1)} = \sqrt{7} \times \sqrt{-1} = \sqrt{7}\, i$
- $\sqrt{-20} = \sqrt{20 \times (-1)} = \sqrt{20} \times \sqrt{-1} = \sqrt{20}\, i = 2\sqrt{5}\, i$

ويمكننا اختصار خطوات الحل باستخدام القاعدة التي ذكرناها في الملاحظة السابقة كالاتي:

- $\sqrt{-9} = \sqrt{9}\, i = 3i$
- $\sqrt{-100} = \sqrt{100}\, i = 10i$
- $\sqrt{-7} = \sqrt{7}\, i$
- $\sqrt{-20} = \sqrt{20}\, i = 2\sqrt{5}i$

4-1 جبر الأعداد المركبة

1-4-1 جمع الأعداد المركبة

تعريف : ليكن

$$z_1 = a + bi \,,\ \ z_2 = c + di \quad \in \mathbb{C}$$

فان :

$$z_1 + z_2 = (a + bi\,) + (\,c + di)$$
$$= (a + c\,) + (\,b + d)i$$

وحيث ان $(a + c\,), (b + d) \in \mathbb{R}$ اي(مجموعة الأعداد الحقيقية مغلقة تحت تأثيرعملية الجمع)

لذلك يكون:

$$z_1 + z_2 = (a + c\,) + (b + d)i \in \mathbb{C}$$

أي ان مجموعة الأعداد المركبة مغلقة تحت تأثير عملية الجمع.

و هذا يعني ببساطة شديدة ان مجموع عددين مركبين هو عدد مركب أيضاً.

مثال (5) : جد مجموع العددين المركبين $(5 + 2i\,), (3 + 4i)$

الحل:

$$(5 + 2i\,) + (3 + 4i) = (5 + 3\,) + (2 + 4)i$$
$$= 8 + 6i$$

مثال (6) : جد مجموع العددين المركبين $(-7 - \sqrt{3}i\,), (2 - 5\sqrt{3}i)$

الحل:

$$(-7 - \sqrt{3}i\,) + (2 - 5\sqrt{3}i) = (-7 + 2\,) + (-\sqrt{3} - 5\sqrt{3})i$$
$$= -5 + (-6\sqrt{3})i \quad = -5 - 6\sqrt{3}i$$

مثال (7) : جد مجموع العددين المركبين $(i\,), (4 - 2i)$

الحل:

$$(\,i\,) + (4 - 2i) = (0 + i\,) + (4 - 2i)$$
$$= (0 + 4\,) + (1 - 2)i$$
$$= 4 - i$$

خواص عملية الجمع في مجموعة الأعداد المركبة

ليكن $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ، تتمتع عملية الجمع في مجموعة الأعداد المركبة بالخواص الأتية :

1) الخاصية الإبدالية أي :
$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

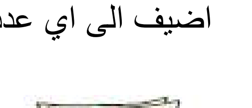
$$(2-6i)+(3+5i)=\boxed{\mathbf{5-i}}$$
$$(3+5i)+(2-6i)=\boxed{\mathbf{5-i}}$$
$$\therefore (2-6i)+(3+5i)=(3+5i)+(2-6i)$$

2) الخاصية التجميعية أي :
$z_1 + (z_2+z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

$$(4+3i)+[(-13+6i)+(9-2i)]$$
$$= (4+3i)+(-4+4i)=\boxed{\mathbf{0+7i}}$$
$$[(4+3i)+(-13+6i)]+(9-2i)$$
$$= (-9+9i)+(9-2i)=\boxed{\mathbf{0+7i}}$$
$$\therefore (4+3i)+[(-13+6i)+(9-2i)]$$
$$=[(4+3i)+(-13+6i)]+(9-2i)$$

3) خاصية وجود العنصر المحايد أي :
$\exists \mathrm{o} = 0+0i \ : \ z+\mathrm{o} = \mathrm{o}+z = z$

أي ان العنصر المحايد في مجموعة الأعداد المركبة هو العدد المركب $0+0i$ والذي لو اضيف الى اي عدد مركب لبقي الناتج دون تغيير.



$$(4-2i)+(0+0i)=(4+0)+(-2+0)i$$
$$=4-2i$$

4) خاصية النظير الجمعي أي :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists(-z) \in \mathbb{C}: z + (-z) = (-z) + z = o = 0 + 0i$$

أي انه لكل عدد مركب نظير جمعي هو العدد المركب ذاته بعد تغيير إشارات كل من جزئيه الحقيقي والتخيلي وعند جمع النظير الجمعي مع العدد الأصلي يكون الناتج هو العنصر المحايد لعملية الجمع وهو $0 + 0i$

z	$-z$	$z + (-z)$
$7 - 3i$	$-7 + 3i$	$0 + 0i$
$0 - 5i$	$0 + 5i$	$0 + 0i$
$1 + 2i$	$-1 - 2i$	$0 + 0i$
$1 - i$	$-1 + i$	$0 + 0i$
$5 + 0i$	$-5 - 0i$	$0 + 0i$
$-2 + 0i$	$2 - 0i$	$0 + 0i$

وسوف لن نتطرق إلى برهنة هذه الخواص في هذا البند .

2-4-1 طرح الأعداد المركبة

تعريف : ليكن

$$z_1 = a + bi\ ,\ \ z_2 = c + di\ \in \mathbb{C}$$

فان :

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a + bi\ ) + \ (\ -c - di)$$
$$= (a - c\ ) + \ (\ b - d)i$$

وحيث ان مجموعة الأعداد الحقيقية مغلقة تحت تأثير عملية الطرح لذلك يكون: -

$$(a - c\ ), (b - d) \in \mathbb{R}$$

ويترتب عليه ان مجموعة الأعداد المركبة مغلقة أيضا تحت تأثير عملية الطرح وهذا يعني ببساطة شديدة ان حاصل طرح عددين مركبين هو عدد مركب أيضاً.

ملاحظة: ان حاصل طرح عددين مركبين يساوي حاصل جمع العدد المركب الأول مع النظير الجمعي للعدد المركب الثاني. أي :

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

مثال (7) : جد حاصل الطرح الاتي : $(5+6i)-(2+3i)$

الحل:

$$(5+6i)-(2+3i)=(5+6i)+(-2-3i)$$
$$=[5+(-2)]+[6+(-3)]i=3+3i$$

مثال (8) : جد حاصل الطرح الاتي : $(-3+9i)-(3+i)$

الحل:

$$(-3+9i)-(3+i)=(-3+9i)+(-3-i)$$
$$=[(-3)+(-3)]+[9+(-1)]i$$
$$=-6+8i$$

3-4-1 ضرب الأعداد المركبة

تعريف : ليكن

$$z_1=a+bi\,,\ \ z_2=c+di\ \ \in\mathbb{C}$$

فان :

$$z_1.z_2=(a+bi).(c+di)$$
$$=(ac-bd)+(bc+ad)i$$

وحيث ان مجموعة الأعداد الحقيقية مغلقة تحت تأثير عمليات الجمع والطرح والضرب فان :

$$(ac-bd),(bc+ad)\in\mathbb{R}$$

$$z_1.z_2=(ac-bd)+(bc+ad)i\ \in\mathbb{C}$$

ويترتب عليه ان مجموعة الأعداد المركبة مغلقة أيضاً تحت تأثير عملية الضرب ، وهذا يعني ببساطة شديدة ان حاصل ضرب عددين مركبين هو عدد مركب أيضاً.

مثال (9) : جد حاصل الضرب الاتي : $(1-2i).(3-5i)$

الحل:

$$(1-2i).(3-5i)=(3-10)+[(-6)+(-5)]i$$
$$=(-7)+(-11)i$$
$$=-7-11i$$

مثال 10) : جد حاصل الضرب الاتي : $(2+3i).(4-5i)$

الحل: $(2+3i).(4-5i)=\big(8-(-15)\big)+[12+(-10)]i$

$=(8+15)+(12-10)i=23+2i$

خواص عملية الضرب في مجموعة الأعداد المركبة

ليكن $z_1,z_2,z_3\mathbb{C}$ ، تتمتع عملية الضرب في مجموعة الأعداد المركبة بالخواص الأتية :

1) الخاصية الإبدالية أي :
$z_1.z_2=z_2.\ z_1$

$(\ 3+5i).(2-6i)=[6-(-30)]+\big(10+(-18)\big)i$

$=(6+30)+(10-18)i=\boxed{\mathbf{36-8}\boldsymbol{i}}$

$(2-6i).(3+5i)=[6-(-30)]+(-18+10)i$

$=(6+30)+(-18+10)i=\boxed{\mathbf{36-8}\boldsymbol{i}}$

$\therefore (3+5i).(2-6i)=(2-6i).(3+5i)$

2) الخاصية التجميعية أي :
$z_1.(z_2.z_3)=(z_1.z_2).z_3$

$(1+\ i).[(2-i).(3+i)]$

$=(1+\ i).\big[\big(6-(-1)\big)+(-3+2)i\big]$

$=(1+\ i).(7-i)$

$=\big(7-(-1)\big)+\big(7+(-1)\big)i$

$=(7+1)+(7-1)i=\boxed{\mathbf{8+6}\boldsymbol{i}}$

$[(1+\ i).(2-i)].(3+i)=\ \big[\big(2-(-1)\big)+\big(2+(-1)\big)i\big].(3+i)$

$=[(2+1)+(2-1)i].(3+i)$

$=\ (3+i).(3+i)$

$=(9-1)+(3+3)i=\boxed{\mathbf{8+6}\boldsymbol{i}}$

$\therefore (1+\ i).[(2-i).(3+i)]=[(1+\ i).(2-i)].(3+i)$

3) خاصية وجود العنصر المحايد الضربي وهو$1+0i$ اي :

$$\exists \mathrm{I} = 1 + 0i \quad : \; z.\mathrm{I} = \mathrm{I}.z = \; z$$

أي ان العنصر المحايد في مجموعة الأعداد المركبة هو العدد المركب $1+0i$ والذي لو ضرب به أي عدد مركب لبقي الناتج دون تغيير.

$$(4+6i).(1+0i) = (4-0) + (6\ +0)i = 4+6i$$

4) خاصية النظير الضربي أي :

$$\forall z \neq (0+0i) \in \; \mathbb{C}, \exists \left(\frac{1}{z}\right) \in \mathbb{C}: z.\left(\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{1}{z}\right).z = \mathrm{I} = 1+0i$$

أي انه لكل عدد مركب عدا $(0+0i)$ نظير ضربي هو مقلوب العدد المركب ذاته وان حاصل ضرب العدد المركب بنظيره الضربي ينت
ج العنصر المحايد لعملية الضرب وهو $1+0i$

z	$\frac{1}{z}$	$z.\left(\frac{1}{z}\right)$
$5-6i$	$\frac{1}{5-6i}$	$\cancel{(5-6i)}.\left(\frac{1}{\cancel{5-6i}}\right) = 1+0i$
$0-7i$	$\frac{1}{0-7i}$	$\cancel{(0-7i)}.\left(\frac{1}{\cancel{0-7i}}\right) = 1+0i$

وسوف لن نتطرق إلى برهنة هذه الخواص في هذا البند .

مهارات جبرية حول ضرب الأعداد المركبة :

مثال 11) : بسط المقدار الاتي $(1+2i)^2$

الحل:

$$(1+2i)^2 = (1+2i)(1+2i)$$
$$= (1-4) + (2+2)i$$
$$= -3+4i$$

ويمكننا إيجاد الناتج باستخدام طريقة مربع حدانية $\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ كالاتي:

$$(1+2i)^2 = 1 + 4i + 4 \times (-1)$$
$$= 1 + 4i - 4 \qquad (i^2 = -1)$$
$$= -3 + 4i$$

مثال 12) : بسط المقدار الاتي $(1-i)^3$

الحل:

$$(1-i)^3 = (1-i)^2(1-i)$$
$$= (1 - 2i + i^2)\,(1-i)$$
$$= \big(1 - 2i + (-1)\big)\,(1-i)$$
$$= (\,-2i\ )\,(1-i)$$
$$= -2i + 2i^2$$
$$= -2i - 2$$
$$= -2 - 2i$$

مثال 13) : بسط المقدار الاتي $(2+i)^4$

الحل:

$$(2+i)^4 = ((2+i)^2)^2$$
$$= (4 + 4i + \ i^2)^2$$
$$= (4 + 4i - 1)^2$$
$$= (3 + 4i\ )^2$$
$$= 9 + 24i + 16\, i^2$$
$$= 9 + 24i - 16$$
$$= -7 + 24i$$

مثال 14) : بسط المقدار الاتي $(1+i)^3+(1-i)^3$

الحل: باستخدام قانون مجموع مكعبين $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$$(1+i)^3+(1-i)^3$$
$$=[(1+i)+(1-i)][(1+i)^2-(1+i)(1-i)+(1-i)^2]$$
$$=[2][(1+2i+i^2)-(1-i^2)+(1-2i+i^2)]$$
$$=[2]\big[\big(1+2i+(-1)\big)-\big(1-(-1)\big)+\big(1-2i+(-1)\big)\big]$$
$$=[2][(2i)-(2)+(-2i)]$$
$$=[2][-(2)]=\ -4=-4+0i$$

طريقة ثانية :

$$(1+i)^3+(1-i)^3=[(1+i)^2(1+i)]+[(1-i)^2(1-i)]$$
$$=[1+2i+i^2](1+i)+[1-2i+i^2](1-i)$$
$$=[1+2i+(-1)](1+i)+[1-2i+(-1)](1-i)$$
$$=[\ 2i\ ](1+i)+[-2i\ ](1-i)$$
$$=\ (2i+2i^2)+(-2i+2i^2)$$
$$=(-2+2i)+(-2-2i)$$
$$=(-4+0i)=-4=-4+0i$$

مثال 15) : أثبت أن $(1-i)^6=8i$

الحل :

$$L.H.S=\ (1-i)^6$$
$$=[(1-i)^2]^3=[1-2i+i^2]^3$$
$$=\ (-2i)^3\ =\ -8i^3=-8\times -i=\ 8i$$
$$=\ R.H.S$$

4-4-1 مفهوم مرافق العدد المركب.

تعريف : ليكن $z = a + bi$ عدداً مركباً فان العدد المركب المرافق له هو $\bar{z} = (a - bi)$

أي انه لكل عدد مركب مرافق هو العدد المركب ذاته بعد تغيير إشارة الجزء التخيلي فيه.

ملاحظة: سنقبل دون برهان خواص مرافق العدد المركب وهي كالاتي :

1) $z.\bar{z} = a^2 + b^2, \ \forall z = a + bi$

2) $z = \bar{z} \ , if \ z \in \mathbb{R}$

3) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z_1} \pm \bar{z_2}$

4) $\overline{z_1 . z_2} = \bar{z_1} . \bar{z_2}$

5) $\bar{\bar{z_1}} = z_1$

6) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{(z_1)}}{\overline{(z_2)}}, \quad z_2 \neq 0$

تأمل الجدول الآتي تجد فيه أعداد مركبة ومرافقاتها وحاصل ضربهما

z	$\bar{z}$	$z.\bar{z}$
$7 - 3i$	$7 + 3i$	$49 + 9 = 58$
$0 - 5i$	$0 + 5i$	$0 + 25 = 25$
$1 + 2i$	$1 - 2i$	$1 + 4 = 5$
$1 - i$	$1 + i$	$1 + 1 = 2$
$5 = 5 + 0i$	$5 = 5 - 0i$	$25 + 0 = 25$
$-2 = -2 + 0i$	$-2 = -2 - 0i$	$4 + 0 = 4$

مثال 16): اذا كان $z_1 = 2 + 3i \ , \ z_2 = 3 - 5i$ فتحقق من صحة الخاصية 3 في الملاحظة أعلاه.

الحل:

$$1) L.H.S = \overline{z_1 + z_2} = \overline{(2 + 3i) + (3 - 5i)}$$

$$L.H.S = \overline{(5 - 2i)} = \boxed{\mathbf{5 + 2i}}$$

$$R.H.S = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (2-3i)+(3+5i) = \boxed{\mathbf{5+2}\boldsymbol{i}}$$

$$\therefore\ L.H.S = R.H.S$$

$$2)\ L.H.S = \overline{z_1 - z_2} = \overline{(2+3i)-(3-5i)}$$

$$L.H.S = \overline{(2+3i)+(-3+5i)} = \overline{-1+8i} = \boxed{\mathbf{-1-8}\boldsymbol{i}}$$

$$R.H.S = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 = (2-3i)-(3+5i)$$

$$R.H.S = (2-3i)+(-3-5i) = \boxed{\mathbf{-1-8}\boldsymbol{i}}$$

مثال 17) : أثبت أن $(1-i)(1-i^2)(1-i^3) = 4$

الحل: تذكر ان: $i^2 = -1\ , i^3 = -i$ كما أوردنا في البند (3 − 1) ولذلك يكون :

$$L.H.S = (1-i)\big(1-(-1)\big)\big(1-(-i)\big)$$

$$= (1-i)(2)(1+i)$$

$$= (2)(1-i)(1+i)$$

$$= (2)(1^2+1^2) = (2)(2) = 4 = R.H.S$$

مثال 18) : جد النظير الضربي للعدد المركب $z = 1+2i$ وضعه بالصيغة الاعتيادية للعدد المركب ، ثم تحقق من صحة الحل.

الحل: ان النظير الضربي للعدد المركب $z = 1+2i$ هو العدد المركب الاتي:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+2i}$$

وللحصول عليه بالصيغة الاعتيادية للعدد المركب نضربه بمرافق المقام اي:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

ولكي يكون الحل صحيحاً لابد من التأكد ان حاصل ضرب العدد بنظيره الضربي هو العنصر المحايد لعملية الضرب وهو $1+0i$ كالأتي :

$$z.\left(\frac{1}{z}\right) = (1+2i)\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right) = \left(\frac{1}{5} - \frac{-4}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{-2}{5}\right)i$$

$$= \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\right)i = \frac{5}{5} + 0i = 1+0i = \mathrm{I}$$

5-4-1 قسمة الأعداد المركبة

تعريف : ليكن $z_1 = a + bi , z_2 = c + di$ عددان مركبان فان :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di}$$

ويمكن تبسيط الناتج إلى الصيغة الجبرية (الاعتيادية) للعدد المركب عـــــن طريق ضرب البسط والمقام بـ (مرافق المقام $\overline{z_2} = c -$).

مثال 19) : ضع كلاً مما يأتي بالصيغة الجبرية (الاعتيادية) للعدد المركب.

$$a)\ \frac{5}{2 - i} \qquad b)\ \frac{2i}{1 + i} \qquad c)\ \frac{2 - 4i}{3 + 5i}$$

الحل:

$$a)\ \frac{5}{2 - i} = \frac{5}{2 - i} \times \frac{2 + i}{2 + i}$$

$$= \frac{10 + 5i}{4 + 1} = \frac{10 + 5i}{5} = \frac{10}{5} + \frac{5}{5}i = 2 + i$$

$$b)\ \frac{2i}{1 + i} = \frac{2i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i}$$

$$= \frac{2i - 2i^2}{1 + 1} = \frac{2i - 2 \times (-1)}{2}$$

$$= \frac{2i + 2}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}i = 1 + i$$

$$c)\ \frac{2 - 4i}{3 + 5i} = \frac{2 - 4i}{3 + 5i} \times \frac{3 - 5i}{3 - 5i}$$

$$= \frac{(6 - 20) + \big(-12 + (-10)\big)i}{9 + 25}$$

$$= \frac{-14 - 22i}{34}$$

$$= \frac{-14}{34} - \frac{22}{34}i$$

$$= \frac{-7}{17} - \frac{11}{17}i$$

1-4-6 تحليل العدد الحقيقي إلى عاملين مركبين

بالاعتماد على الحقيقة التي توصلنا لها في بداية الفصل هذا وهي $(i^2 = -1)$ يمكن تحليـــــــل المقدار الجبري $a^2 + b^2$ إلى حاصل ضرب عددين مركبين كل منهما بالصيغة $(a + bi)$ كما يأتي :

$$\boxed{a^2 + b^2 = a^2 - b^2 i^2 = (a + bi)(a - bi)}$$

مثال (20) : حلل العدد الحقيقي 50 الى عاملين بالصورة $(a + bi)$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$

الحل :

الحل الأول	الحل الثاني
$50 = 49 + 1$	$50 = 1 + 49$
$= 49 - i^2$	$= 1 - 49i^2$
$= (7 - i)(7 + i)$	$= (1 - 7i)(1 + 7i)$

1-4-7 تساوي عددين مركبين

تعريف : ليكن $z_1 = a + bi \, , z_2 = c + di$ عددان مركبان فان :

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c, b = d$$

حيث $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

ونستطيع إعادة صياغة التعريف أعلاه كما يأتي :

اذا تساوى عددان مركبان يتساوى الجزءان الحقيقيان لكل منهما ، ويتساوى الجزءان التخيليان لكل منهما ، والعكس صحيح .

مثال (21) : جد قيمة كل من x, y الحقيقيتان اللتان تحققان المعادلة الأتية :

$$(3x + 2) + 6i = 8 + (y - 1)i$$

الحل : باستخدام تعريف تساوي عددين مركبين :

$$3x + 2 = 8 \Rightarrow 3x = 8 - 2$$

$$3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$6 = (y - 1) \Rightarrow y = 6 + 1 \Rightarrow \boxed{y = 7}$$

مثال 22) : جد قيمة كل من x, y الحقيقيتان اللتان تحققان المعادلة الأتية :

$$y + 20i = (3x + i)(x + 3i)$$

الحل:

$$y + 20i = (3x^2 - 3) + (x + 9x)i$$

$$y + 20i = (3x^2 - 3) + 10xi$$

ومن تعريف تساوي عددين مركبين نتوصل إلى :

$$y = 3x^2 - 3 \ldots (1)$$

$$10x = 20 \ldots (2)$$

نبسط المعادلة (2) لنحصل على قيمة x

$$x = \frac{20}{10} \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

وبتعويض قيمة x في المعادلة الأولى نحصل على :

$$y = 3 \times 2^2 - 3 \Rightarrow \boxed{y = 9}$$

تمرين (1-1)

1. ضع كلاً مما يأتي بالصيغة الاعتيادية للعدد المركب :

$$i^8, i^{11}, i^{65}, i^{105}, i^{16n-1}, i^{8n+2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

2. جد ناتج كل مما يـأتي بالصيغة الاعتيادية للعدد المركب :

$a)\ (1 + i)^3 + (1 + i)^4$

$b)\ (2 - 3i) + (-6 - 7i)$

$c)\ (5 + i) - (1 - 4i)$

$d)\ (3 - 2i)^3$

$e)\ (-3 + i) + (3 + i)$

$f)\ \left(\frac{1 + 3i}{4 - i}\right)^2$

$g)\ \frac{3 - 5i}{(2 - 2i)^2}$

$h)\ \frac{(1 - 2i)^2}{3 - 5i}$

3. جد قيمة كل من x, y الحقيقيتان اذا علمت ان :

$$a)\ \ (2x+3yi)(1+i)^2 = \frac{3-i}{1-i}$$

$$b)\ \ 6i = (x+i)(y+i)+1$$

$$c)\ \ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 + (2x-yi) = (1+2i)^2$$

$$d)\ \ (2x+i)\,.\,(x-i) = \frac{16y^2+9}{4y+3i}$$

4. أثبت أن :

$$a)\ \ \frac{1+i^2+i^4+i^5+i^7}{i+i^8-i^9} = 1$$

$$b)\ \ \frac{1}{(1+2i)^2}+\frac{1}{(1-2i)^2} = \frac{-6}{25}$$

$$c)\ \ \frac{(1-i)^2}{1+i}-\frac{(1+i)^2}{1-i} = -2i$$

5. حلل كلاً من الأعداد الأتية إلى حاصل ضرب عاملين مركبين بالصورة $a+bi$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$

$25, 40, 65\ ,125, 170.$

(1-4-8) أيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب

تعلمنا سابقاً ان للمعادلة $x^2 = a$ حيث a عدد حقيقي موجب ، يوجد عددان حقيقيان هما $\pm\sqrt{a}$ يحققـــان المعادلة ويسمى كل منهما بالجذر التربيعي للعدد الحقيقي الموجب a اما اذا كانت $a = 0$ فانه يوجد جذر واحد فقط هو الصفر أيضاً. وكذلك الحال بالنسبة للمعادلة ذاتها $x^2 = a$ حيث a عدد حقيقي سالب، يوجد عددان مركبان هما $0 \pm \sqrt{a}\, i$ يحققان المعادلة ويسمى كل منهما بالجذر التربيعي للعدد الحقيقي السالب a اما اذا كانت $a = 0$ فانه يوجد جذر واحد فقط هو العدد المركب $0+0i$. والان سوف نتعلم كيفية إيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب :

مثال 23) : جد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $5+12i$.

الحل : نفرض ان :

$$x+yi = \sqrt{5+12i}$$

وبتربيع الطرفين نحصل على :

$$x^2+2xyi+y^2i^2 = 5+12i$$

$$x^2+2xyi-y^2 = 5+12i$$

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = 5 + 12i$$

ومن تعريف تساوي عددين مركبين نتوصل إلى :

$$(x^2 - y^2) = 5 \quad \dots (1)$$

$$2xy = 12 \qquad \dots (2)$$

نستخرج y بدلالة x من المعادلة الثانية وكما يأتي :

$$y = \frac{12}{2x} \Rightarrow \boxed{y = \frac{6}{x}} \dots (3)$$

الأن نعوض قيمة y في المعادلة (1) وبذلك نحصل على :

$$x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 5 \Rightarrow \ x^2 - \frac{36}{x^2} = 5$$

نضرب المعادلة بالمقدار x^2 فتصبح بالصورة الاتية :

$$x^4 - 36 = 5x^2$$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

$$(x^2 - 9)(x^2 + 4) = 0$$

أما

$$(x^2 - 9) \ = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \ \ \Rightarrow x = \pm 3$$

عندما $x = 3$ فأن $y = \frac{6}{3} = 2$ وهذا يعني ان الجذر الاول هو $3 + 2i$

عندما $x = -3$ فأن $y = \frac{6}{-3} = -2$ وهذا يعني ان الجذر الثاني هو $-3 - 2i$

أو $(x^2 + 4) = 0 \Rightarrow x^2 = -4$

$$x = \pm\sqrt{-4} \ = \pm 2i$$

يهمل لأننا أفترضنا ان x هي الجزء الحقيقي من العدد المركب.

أي ان الجذرين التربيعيين للعدد المركب $5 + 12i$ هما :

$(-3 - 2i)$, $(3 + 2i)$ ومن الواضح ان احدهما هو النظير الجمعي للآخر.

5-1 حل المعادلات في حقل الأعداد المركبة

تعلمنا سابقاً بأن المعادلة التي بالصيغة $ax^2 + bx + c = 0$ حيـــث $a, b, c \in \mathbb{R}\ , a \neq 0$ تسمى معادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد ولها جذران يمكن استخراجهمـــــا بطريقة القانــــون (الدستور) :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ونتذكر أيضاً ان المقدار الجبري $b^2 - 4ac$ (والذي يسمى بالعامل المميز) عندما يكون سالباً فأننا كنّا نقول ان المعادلة ليس لها جذور في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. والان بعد ان تعرفنا على مجموعة الاعداد المركبـــــة اصبح من الممكن إيجاد جذري المعادلة التي عاملها المميز كمية سالبة كون الجذرين هما عددان مركبان.

مثال 24) : جد مجموعة حل المعادلة $x^2 - 6x = -13$ في مجموعة الاعداد المركبة .

الحل:

$$x^2 - 6x + 13 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 13}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm 4i}{2}$$

$$x = \frac{2(3 \pm 2i)}{2}$$

$$x = 3 \pm 2i$$

$$\therefore S.s = \{3 + 2i, 3 - 2i\}$$

ملاحظة 1:

يمكننا الاستنتاج بسهولة انه في المعادلة التي بالصيغة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ فان :

مجموع جذري المعادلة هو $\frac{-}{a}$ و حاصل ضرب الجذرين هو $\frac{c}{a}$

وعليه فأننا نستطيع التوصل إلى ان المعادلة يمكن كتابتها بالصيغة الأتية :

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$$

مثال 25) : جد المعادلة التربيعية التي جذريها $2 \pm 3i$.

الحل : نجد مجموع الجذرين كالاتي :

$$(2 + 3i) + (2 - 3i) = 4 + 0i = 4$$

الأن نجد حاصل ضرب الجذرين (لاحظ أنهما عددان مركبان مترافقان) :

$$(2 + 3i).(2 - 3i) = 4 + 9 = 13$$

نستخدم الصيغة : $x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

ملاحظة 2:

1) أذا كان جذرا المعادلة عددين مركبين مترافقين فان المعادلة التربيعية تكون ذات معاملات حقيقية والعكس صحيح أي (إذا كانت المعادلة التربيعية ذات معاملات حقيقية فان جذريها مترافقان).
2) أذا كان جذرا المعادلة عددين مركبين غير مترافقين فان المعادلة التربيعية تكون ذات معاملات ليست حقيقية والعكس صحيح أي (إذا كانت المعادلة التربيعية ذات معاملات ليست حقيقية فان جذريها غير مترافقان).

مثال 26) : جد المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذريها العـــدد المركب $4 - 3i$

الحل: حيث ان المعادلة التربيعية ذات معاملات حقيقية فان جذريها عددان مركبان مترافقان.

أي ان الجذرالأخر هو $4 + 3i$.

مجموع الجذرين : $(4 + 3i) + (4 - 3i) = 8 + 0i = 8$

حاصل ضرب الجذرين: $(4 + 3i).(4 - 3i) = 16 + 9 = 25$

المعادلة التربيعية هي : $x^2 - 8x + 25 = 0$

مثال 27) : اذا كان $(1+2i)$هو احد جذري المعادلة $x^2-(3-i)x+a=0$
فما هو الجذر الاخر وما قيمة a ؟

الحل : نفرض ان الجذر المجهول هو z وبالمقارنة مع الصيغة :

$$x^2-(\text{مجموع الجذرين})x+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0$$

يمكننا التوصل إلى ان :

$$z+(1+2i)=3-i$$

$$z=(3-i)-(1+2i)$$

$$z=(3-i)+(-1-2i)=2-3i$$

أي ان الجذر الثاني هو $2-3i$ ، ولإيجاد قيمة a نلاحظ أنها تساوي حاصل ضرب الجذرين أي :

$$a=(1+2i)(2-3i)=(2+6)+(4-3)i \Rightarrow a=8+i$$

مثال 28) : جد الجذر التكعيبي للعدد 8 في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

الحل: نفرض ان : $x^3=8 \Rightarrow x^3-8=0$

$$(x-2)(x^2+2x+4)=0$$

$\boxed{\text{أما :}}$ $(x-2)=0 \Rightarrow x=2$

$\boxed{\text{أو :}}$ $(x^2+2x+4)=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4\times1\times4}}{2\times1}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{-12}}{2}$$

$$=\frac{-2\pm2\sqrt{3}i}{2}$$

$$=\frac{2(-1\pm\sqrt{3}i)}{2}=-1\pm\sqrt{3}i$$

$$\therefore S.s=\{2,-1+\sqrt{3}i,-1-\sqrt{3}i\}$$

مثال 29) : جد الجذور التكعيبية للعدد $-8i$ في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$.

الحل: نفرض ان : $x^3 = -8i$

$$x^3 + 8i = 0$$

نحول الحد $(+8i)$ الى $(-8i^3)$ لأن $(i^3 = -i)$ كما بينا بالبند (2-1) لتكتمـــل صيغة الفرق بين مكعبين $x^3 - 8i^3 = 0$

$$(x-2i)(x^2+2xi+4i^2) = 0$$

$$(x-2i)(x^2+2xi-4) = 0$$

أما : $(x-2i) = 0$

$$x = 0 + 2i$$

أو : $(x^2+2xi-4) = 0$

$$x = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-2i \pm \sqrt{4i^2+16}}{2}$$

$$= \frac{-2i \pm \sqrt{-4+16}}{2}$$

$$= \frac{-2i \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{-2i \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2(-i \pm \sqrt{3})}{2}$$

$$= -i \pm \sqrt{3}$$

$$= \pm\sqrt{3} - i$$

$$\therefore S.s = \{0+2i, -\sqrt{3}-i, \sqrt{3}-i\}$$

تمرين (1-2)

1) كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية اذا كان احد جذريها $\left(\sqrt{3}-i\right)^2$.

2) اذا كان $(3i)$ هو احد جذري المعادلة الآتية فما هو الجذر الأخر وما قيمة h ؟

$$z^2-hz+(3+6i)=0$$

3) اذا كانت المعادلة التربيعية الأتية جذرها الأول يساوي ضعف جذرها الثاني فما جذراها وما قيمة k

$$x^2-\ (2-i)x+\left(k-\frac{8}{9}i\right)=0$$

4) اذا كان $(A+Bi)^2$ هو احد جذري المعادلة $x^2+10x+169=0$ فما قيمة A,B ؟

5) جد مجموعة حل المعادلة : $2z+i=3-zi$.

6) جد الجذرين التربيعيين للأعداد المركبة الأتية :

$$a)\ 1+\sqrt{3}i \quad ,\quad b)\ \frac{14+2i}{1+i} \quad ,\quad c)\ \frac{82+11i}{2+i}$$

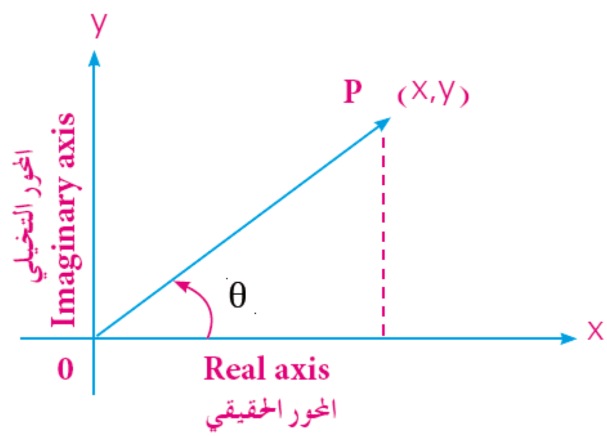
7) ما قيمة المقدار $\sqrt{2x-yi}$ اذا علمت ان :

$$x+yi=\frac{7-4i}{2+i}$$

8) جد الجذور التكعيبية للعدد $-64i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

6-1 التمثيل الهندسي للأعداد المركبة

تمثل الأعداد المركبة هندسياً في مستوي متعامد يسمى مستوي(كاوس) نسبة إلى العالم الألماني الشهير (فريدريك كاوس) وسوف نسميه بشكل مبسط بالمستوي المركب (Complex Plane). سوف نتناول في هذا البند بعض العمليات على الأعداد المركبة هندسياً حيث تسمى الأشكال التي تمثل في المستوي المركب بـ (أشكال أرجاند) نسبة إلى العالم أرجاند.يسمى المحور الأفقي في المستوي المركب بـ (المحور الحقيقي) ويمثل عليه الجزء الحقيقي للعدد المركب.كما يسمى المحورالعمودي بـ (المحورالتخيلي) ويمثل عليه الجزء التخيلي للعدد المركب وبالتالي فان العدد المركب $x+yi$ يمثل هندسياً بالنقطة (x,y) كما في الشكل1-1 الاتي :



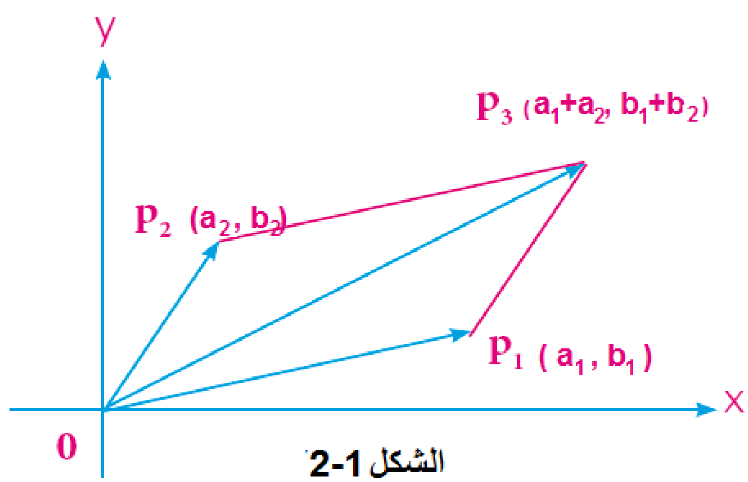
الشكل 1-1

الأن لو كان: $z_1 = a_1 + b_1 i \quad , \quad z_2 = a_2 + b_2 i$ عددين مركبين ممثلين بالنقطتين $P_1(a_1, b_1) \; , \; P_2(a_2, b_2)$ فأن :

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

أي ان المجموع يمكن تمثيله بالنقطة $P_3(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ مستخدمين معلوماتنا في المتجهات كما في الشكل 1-2 الاتي حيث : $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_3}$

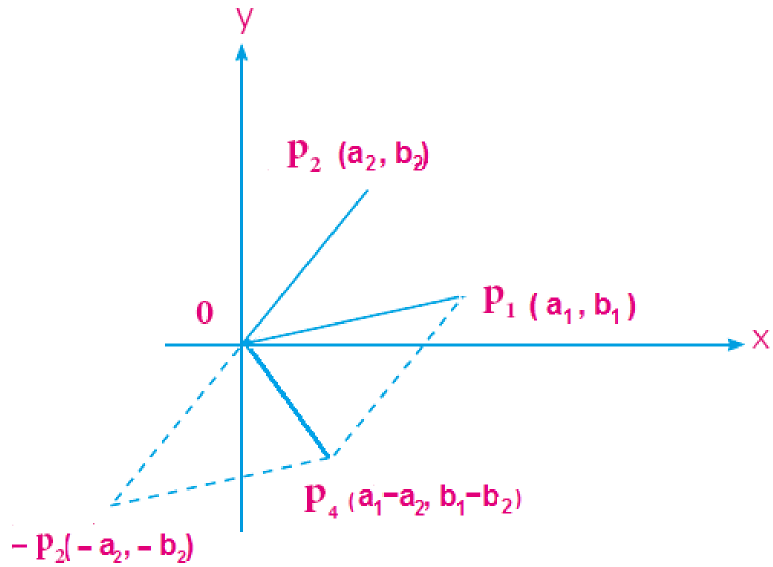


الشكل 1-2

وبنفس الأسلوب يمكننا التوصل إلى ان :

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 + b_1 i) + (-a_2 - b_2 i)$$

حيث ان المتجه $-z_2$ يمكن الحصول عليه بيانياً من دوران المتجه $\overrightarrow{OP_2}$ حول نقطة الاصل بزاوية مقدارها $180°$ ويمكن تمثيل عملية الطرح بيانياً بأكمال رسم متوازي الاضلاع وكما في الشكل 1-3 الاتي:



الشكل 1-3

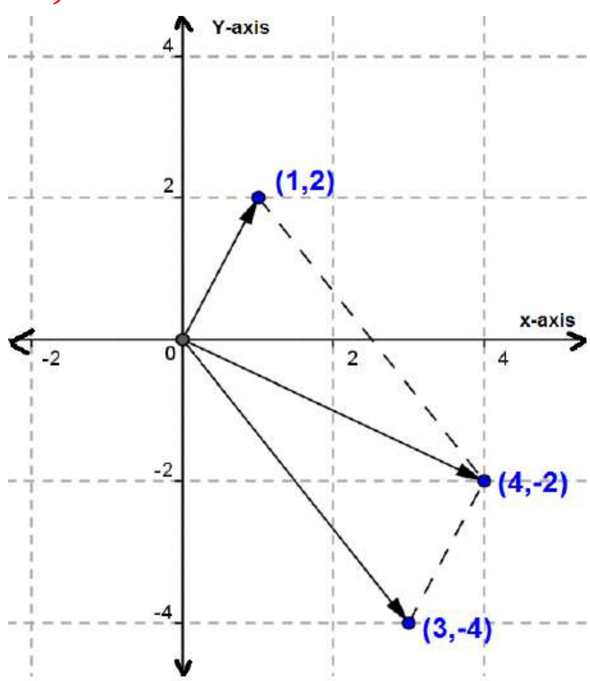
مثال 30) : مثل العمليات الاتية هندسياً في شكل أرجاند:

$$a) \quad (1+2i)+(3-4i)$$

$$b) \quad (5-2i)-(2-3i)$$

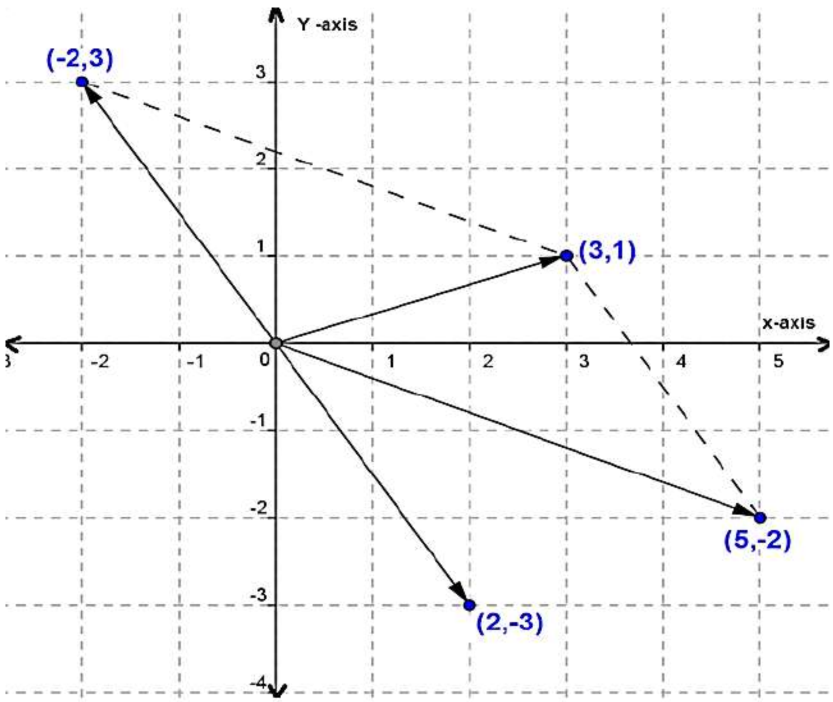
الحل:

$$a) \quad (1+2i)+(3-4i)=4-2i$$



الشكل 1-4

$b) \quad (5-2i)-(2-3i) \;\; = (5-2i)+(-2+3i) = 3+i$



الشكل 1-5

تمرين (1-3)

1. أكتب النظير الجمعي لكل من الأعداد المركبة الآتية ثم مثل الأعداد ونظائرها الجمعية في شكل أرجاند لكل حالة بصورة مستقلة.

$$z_1 = 1+4i \;\; , \;\; z_2 = -2+2i \quad , \quad z_3 = -3i$$

2. أكتب العدد المرافق لكل من الأعداد المركبة الآتية ثم مثل الأعداد ومرافقاتها في شكل أرجاند لكل منها بصورة مستقلة.

$$z_1 = 3+5i \;\; , \;\; z_2 = -4+3i \quad , \quad z_3 = i$$

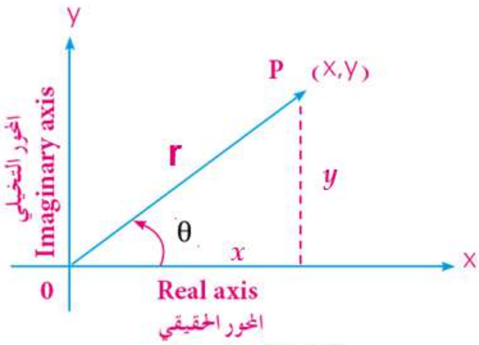
3. اذا كان $z = 6-2\mathrm{i}$ فمثل على المستوي المركب بشكل ارجاند ما يأتي :

$$z \;\; , \qquad \bar{z} \; , \qquad (-z)$$

7-1 الصيغة القطبية للعدد المركب

1-7-1 المقياس والسعة للعدد المركب

ليكن $x + yi$ عدداً مركباً ممثلاً على المستوي المركب في الشكل 1-6 المجاور بالنقطة $P(x, y)$. نقول ان إحداثيي الزوج المرتب (r, θ) هما الاحداثيان القطبيان للنقطة P حيث تمثل نقطة الاصل O القطب والضلع $\overrightarrow{OP}$ يمثل الضلع الابتدائي وهذا يعني:



الشكل 1-6

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \|\overrightarrow{OP}\| \\ \theta &= m\measuredangle XOP \end{aligned}}$$

وحيث ان :

$$\boxed{\sin\theta = \frac{y}{r} \quad , \cos\theta = \frac{x}{r}}$$

يمكننا ان نقول :

$$\boxed{\begin{aligned} R(z) &= x = r\cos\theta \\ I(z) &= y = r\sin\theta \end{aligned}}$$

حيث $R(z)$ يرمز للجزء الحقيقي من العدد المركب و $I(z)$ يرمز للجزء التخيلي من العدد المركب.

يسمى r بمقياس العدد المركب وهو عدد حقيقي غير سالب ويرمز له بالرمز $(Mod\ z)$ أو $\|z\|$

حيث $r = \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ أما الزاوية فان قياسها يسمى سعة العدد المركب واختصاراً تكتب $\theta = arg(z)$

> **ملاحظة :**
>
> إذا كانت $\theta \in [0,2\pi]$ فإنها تسمى القيمة الأساسية لسعة العدد المركب.
>
> ويمكن ان يكون لـ θ عدداً لا نهائياً من القيم لعدد صحيح من الدورات ونقول ان السعة هي $(\theta + 2)$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

مثال (31) : جد المقياس والسعة العدد المركب $z = 3 + \sqrt{3}\,i$.

الحل:

$$r = \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ , \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

وهذا يعني ان القيمة الأساسية للسعة هي $\frac{\pi}{6}$ أما السعة فهي $\frac{\pi}{6} + 2n\pi \ ; n \in \mathbb{Z}$.

مثال 32) : جد المقياس والسعة العدد المركب $z = -2 + 2i$.

الحل:

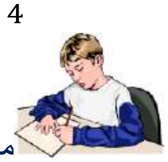
$$r = \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ , \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

وحيث ان إشارة $si\,n\,\theta$ موجبة وإشارة $\cos\theta$ سالبة نستنتج ان θ تقع في الربع الثاني

وفيه تكون قيمة زاوية الأسناد هي $\frac{\pi}{4}$. وهذا يعني ان القيمة الأساسية للسعة هي :

$(\pi - \theta) = \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$ أما السعة فهي : $\left(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right)\ ; n \in \mathbb{Z}$



مثال 33) : جد المقياس والسعة العدد المركب $z = \frac{4}{1+\sqrt{3}i}$

الحل:

$$z = \frac{4}{1+\sqrt{3}i} \times \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{4-4\sqrt{3}i}{1+3}$$

$$z = \frac{4-4\sqrt{3}i}{4}$$

$$z = \frac{4\left(1-\sqrt{3}i\right)}{4} = 1 - \sqrt{3}i$$

$$r = \|z\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$r = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\ , \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$$

وحيث ان إشارة $sin\,\theta$ سالبة وإشارة $\cos\theta$ موجبة نستنتج ان θ تقع في الربع الرابع

وفيه تكون قيمة زاوية الأسناد هي $\frac{\pi}{3}$ وهذا يعني ان القيمة الأساسية للسعة هي:

أما السعة فهي $(2\pi - \theta) = \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3}$: $\left(\frac{5\pi}{3} + 2n\pi\right); n \in \mathbb{Z}$

مثال (34) : عدد مركب مقياسه 6 والقيمة الاساسية لسعته هي $\frac{7\pi}{6}$ ، جد شكليه الجبري والديكارتي.

الحل: حيث ان

$$\theta = \frac{7\pi}{6} = \frac{7 \times 180°}{6} = 210°$$

وهي زاوية تقع في الربع الثالث وزاوية الاسناد لها هي $30°$ لأن :

$$210° = 180° + 30°$$

لذلك فان :

$$sin\frac{7\pi}{6} = \frac{-1}{2} \quad , \qquad cos\frac{7\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$x = r\,cos\,\theta = 6.\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -3\sqrt{3}$$

$$y = r\,sin\,\theta = 6.\left(\frac{-1}{2}\right) = -3$$

الشكل الجبري للعدد المركب هو: $z = x + yi = -3\sqrt{3} - 3i$

أما الشكل الديكارتي فهو: $(-3\sqrt{3}, -3)$

2-7-1 التعبير عن العدد المركب بالصيغة القطبية (صيغة أويلر)

يعبّر عن العدد المركب الذي شكله الجبري $z = x + yi$ وشكله الديكارتي (x, y) بالصورة القطبية الأتية :

$$\boxed{\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}}$$

مثال (35) : عبّر عن العدد المركب $z = -2\sqrt{3} - 2i$ بالصيغة القطبية.

الحل:

$$Mod(z) = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

وحيث ان إشارة $\sin\theta$ سالبة وإشارة $\cos\theta$ سالبة نستنتج ان θ تقع في الربع الثالث وفيه تكون قيمة زاوية الأسناد هي $\frac{\pi}{6}$ وهذا يعني ان القيمة الاساسية للسعة هي:

$$arg(z) = (\pi + \theta) = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{6}$$

لذلك فان الصيغة القطبية لهذا العدد المركب هي : $z = 4(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,sin\frac{7\pi}{6})$

مثال 36) : عبّر عن الأعداد المركبة الاتية بالصيغة القطبية.

$a)\ 1 + 0i \quad , \quad b) 0 + i \quad c) -1 + 0i \quad d)\ \ 0 - i$

الحل :

$a)\ 1 + 0i$

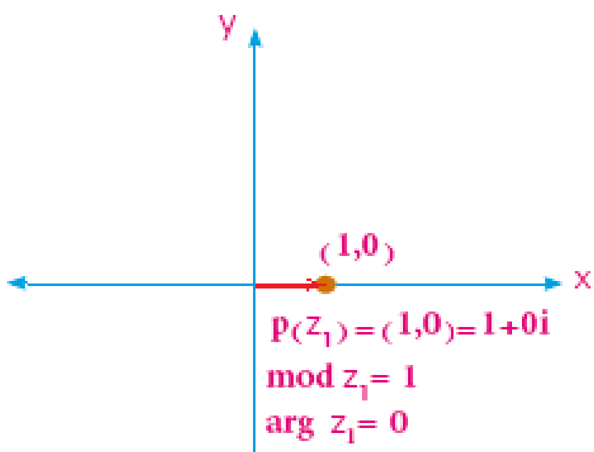
$$Mod(z) = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

$$sin\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0\,, \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

اي ان: $arg(z) = 0°$ لذلك فان الصيغة القطبية لهذا العدد المركب هي :

$$z = 1(\cos 0° + i\,sin\,0°)$$

وكما موضح بالشكل 1-7 الاتي :



الشكل 1-7

$b)0+i$

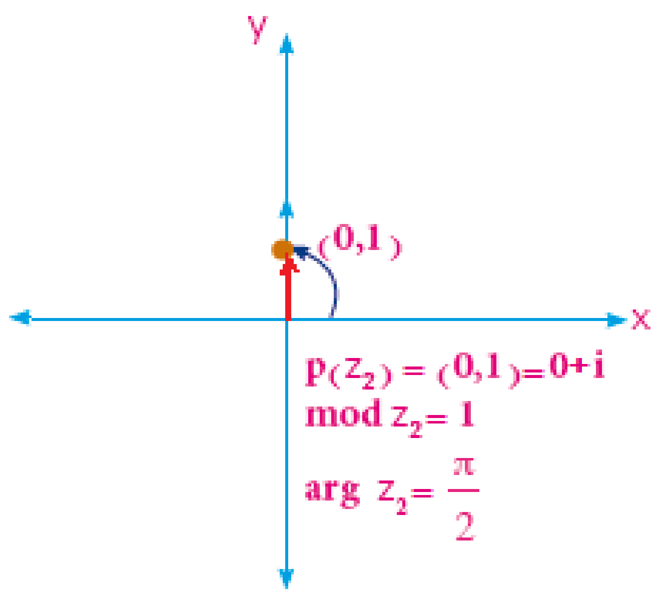
$$Mod(z)=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{0^2+1^2}=1$$

$$sin\,\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{1}=1\quad ,\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{0}{1}=0$$

أي ان : $arg(z)=\frac{\pi}{2}$ لذلك فان الصيغة القطبية لهذا العدد المركب هي :

$$z=1(\cos\frac{\pi}{2}+i\,sin\frac{\pi}{2})$$

وكما موضح بالشكل 1-8 الاتي :



الشكل 1-8

$c)-1+0i$

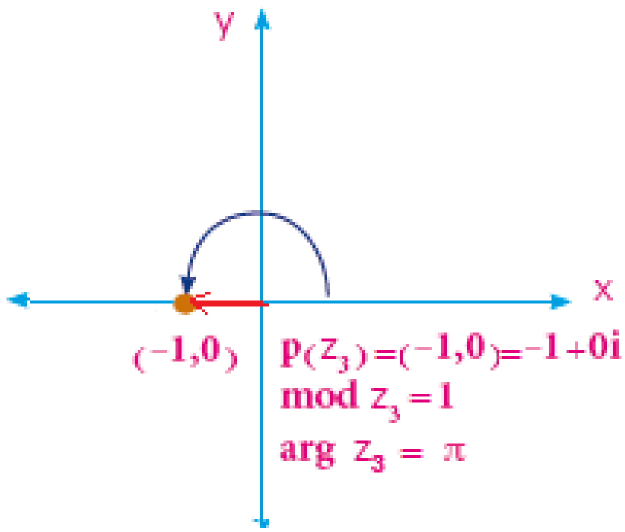
$$Mod(z)=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1$$

$$sin\,\theta=\frac{y}{r}=\frac{0}{1}=0\quad ,\quad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{1}=-1$$

أي ان : $arg(z)=\pi$ لذلك فان الصيغة القطبية لهذا العدد المركب هي

$$z=1(\cos\pi+i\,sin\,\pi)$$

وكما موضح بالشكل 1-9 الاتي :



الشكل 1-9

$d)\quad 0-i$

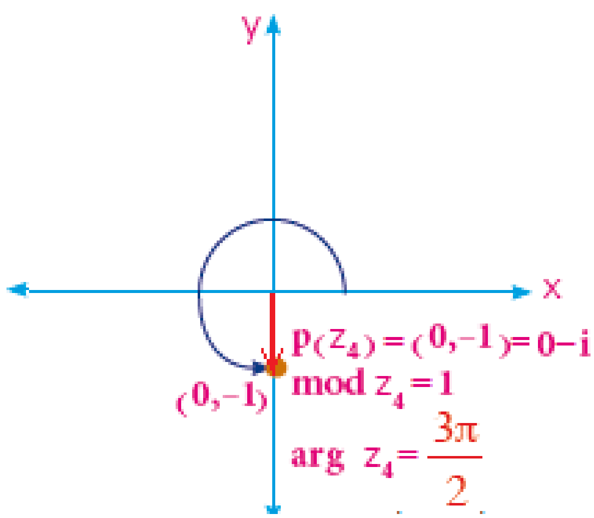
$$Mod(z)=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{1}=-1 \quad , \qquad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{0}{1}=0$$

أي ان : $arg(z)=\frac{3\pi}{2}$ لذلك فان الصيغة القطبية لهذا العدد المركب هي:

$$z=1(\cos\frac{3\pi}{2}+i\,sin\frac{3\pi}{2})$$

وكما موضح بالشكل 1-10 الاتي :



الشكل 1-10

نستطيع الأن ان نلخص ما توصلنا اليه في المثال السابق كما يلي :

العدد المركب	الصيغة القطبية
$a)\ \ 1+0i$	$z=1(\cos 0° + i\,sin\,0°)$
$b)\ \ 0+i$	$z=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\,sin\frac{\pi}{2}\right)$
$c)\ \ -1+0i$	$z=1(\cos\pi + i\,sin\,\pi)$
$d)\ \ 0-i$	$z=1\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\,sin\frac{3\pi}{2}\right)$

حيث يمكننا الاعتماد على هذه الأعداد المركبة وصيغها القطبية في إيجاد الصيغ القطبية للأعداد المركبة الأخرى التي شكلها الجبري بالصيغة $\pm a + 0i$ أو بالصيغة $0 \pm bi$

مثال 37) : عبّر عن الأعداد المركبة الاتية بالصيغة القطبية ومثلها بالرسم .

$a)\,5+0i \quad , \qquad b)-4+0i \quad c)0+9i \qquad d)\ \ 0-2i$

الحل :

$a)\ 5+0i\ = 5(1+0i) \Rightarrow\ z = 5(\cos 0° + i\,sin\,0°)$

$b)-4+0i = 4(-1+0i) \Rightarrow\ z=4(\cos\pi + i\,sin\,\pi)$

$c)\ 0+3i = 3(0+i\ ) \Rightarrow\ z=3(\cos\frac{\pi}{2}+i\,sin\frac{\pi}{2})$

$d)0-2i\ = 2(0-i)\ \Rightarrow\ z=2(\cos\frac{3\pi}{2}+i\,sin\frac{3\pi}{2})$

الشكل 11-1

تمرين (4-1)

1. جد المقياس والسعة لكل من الاعداد المركبة الاتية :

$a)\quad z = 3 - 3\sqrt{3}i$

$b)\quad z = \frac{2}{i}$

$c)\quad z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5$

$d)\quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

2. أكتب الأعداد المركبة الاتية بالشكلين الجبري والديكارتي :

$a)\quad Mod(z) = \sqrt{2}\ ,\quad \theta = arg(z) = \frac{\pi}{4}$

$b)\quad Mod(z) = 1\ ,\quad \theta = arg(z) = \frac{5\pi}{6}$

$c)\quad Mod(z) = 2\ ,\quad \theta = arg(z) = \frac{\pi}{3}$

$d)\quad Mod(z) = 2\sqrt{2}\ ,\quad \theta = arg(z) = \frac{5\pi}{4}$

3. ضع الاعداد المركبة الاتية بصيغة أويلر (الصيغة القطبية).

$a)\quad z = (1,1)$ $\qquad b)\quad z = 1 + \sqrt{3}i$ $\qquad c)\quad z = \left(2\sqrt{3}, 0\right)$

$d)\quad z = 3\sqrt{3} - 3\,i$ $\qquad e)\quad z = (0, -8)$ $\qquad f)\quad z = (-11,0)$

$g)\quad z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ $\qquad h)\quad z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ $\qquad i)\quad z = \frac{4}{1+\sqrt{3}\,i}$

$j)\quad z = \frac{-10\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}$ $\qquad k)\quad z = \frac{-8}{1+\sqrt{3}i}$ $\qquad L)\quad z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$

الفصل الثاني

القطوع المخروطية(Conic Sections)

الاهداف السلوكية:

ينبغي للطالب في نهاية هذا الفصل ان يكون قادراً على ان :

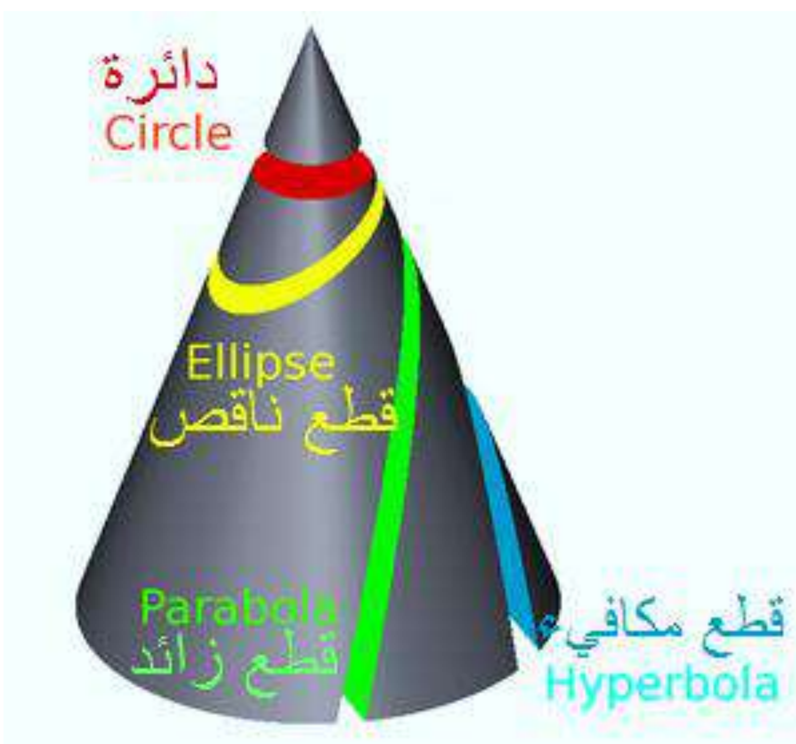
1. يتعرف على مفهوم القطع المكافئ كأحد القطوع المخروطية وكيفية تكوينه عن طريق قطع المخروط الدائري القائم بمستوٍ عمود على قاعدته.
2. يتعرف على الشكل الهندسي للقطعٍ المكافئ الذي راسه نقطة الأصل ويتمكن من ادراك العلاقة بين بؤرته ودليله .
3. يتوصل إلى المعادلتين القياسيتين للقطع المكافئ الذي راسه نقطة الأصل وبؤرته على احد المحورين الإحداثيين باستخدام التعريف.
4. يستخدم المعادلتين القياسيتين للقطع المكافئ في استخراج إحداثيي بؤرته ومعادلة دليله ان علمت معادلته.
5. يستخرج معادلة القطع المكافئ ان علم إحداثيي بؤرته أومعادلة دليله أوأية معلومات أخرى كافية.
6. يتعرف على مفهوم القطع الناقص كأحد القطوع المخروطية وكيفية تكوينه عن طريق قطع المخروط الدائري القائم بمستوٍ لا يوازي قاعدته.
7. يتعرف على الشكل الهندسي للقطعٍ الناقص الذي راسه نقطة الأصل ويتمكن من تحديد مواقع بؤرتيه وقطبيه ورأسيه ومحوريه ويتعرف على مفهوم الاختلاف المركزي له.
8. يتوصل إلى المعادلتين القياسيتين للقطع الناقص الذي راسه نقطة الأصل وبؤرتاه على احد المحورين الإحداثيين باستخدام التعريف.
9. يستخدم المعادلتين القياسيتين للقطع الناقص في استخراج إحداثيي بؤرتيه ،رأسيه،قطبيه وطول كل من محوريه ومساحته ومحيطه ان علمت معادلته.
10. يستخرج معادلة القطع الناقص ان علمت عنه المعلومات الكافية لذلك.
11. يرسم القطع الناقص على الورق البياني .
12. يتعرف على مفهوم القطع الزائد كأحد القطوع المخروطية وكيفية تكوينه عن طريق قطع المخروط الدائري القائم بمستوٍ يوازي مستوي مولدين من مولداته.
13. يتعرف على الشكل الهندسيٍ للقطع الزائد الذي راسه نقطة الأصل ويتمكن من تحديد مواقع بؤرتيه وقطبيه ورأسيه ومحوريه ويتعرف على مفهوم الاختلاف المركزي له.
14. يتوصل إلى المعادلتين القياسيتين للقطع الزائد الذي راسه نقطة الأصل وبؤرتاه على احد المحورين الإحداثيين باستخدام التعريف.
15. يستخدم المعادلتين القياسيتين للقطع الزائد في استخراج إحداثيي بؤرتيه، رأسيه ، وقطبيه وطول كل من محوريه ان علمت معادلته.
16. يستخرج معادلة القطع الزائد ان علمت عنه المعلومات الكافية لذلك.
17. يرسم القطع الزائد على الورق البياني باستخدام المستقيمين المحاذيين.

الفصل الثاني

القطوع المخروطية(Conic Sections)

المحتوى العلمي

1-2 القطوع المخروطية (مراجعة)
2-2 القطع المكافئ
1-2-2 تعريف القطع المكافئ
2-2-2 معادلة القطع المكافئ
3-2 القطع الناقص
1-3-2 تعريف القطع الناقص
2-3-2 معادلة القطع الناقص
3-3-2 رسم القطع الناقص
4-2 القطع الزائد
1-4-2 تعريف القطع الزائد
2-4-2 معادلة القطع الزائد
3-4-2 رسم القطع الزائد



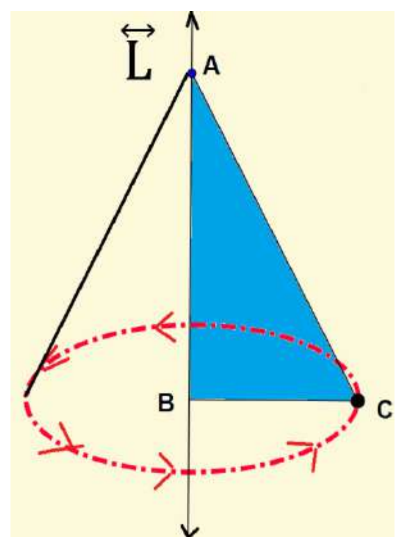
الفصل الثاني

القطوع المخروطية(Conic Sections)

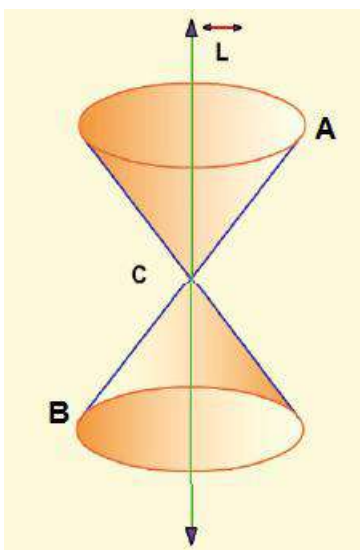
1-2 القطوع المخروطية (مراجعة)

يتولد المخروط الدائري القائم من دوران المثلث ABC القائم الزاوية في B دورة كاملة حول احد الضلعين القائمين كمحور للدوران كما في الشكل (1-2) أما في الشكل (2-2) فإننا نلاحظ انه ينتج عن دوران مستقيم حول محور ثابت بزاوية ثابتة بينهما مخروط دائري قائم وان مولدي المخروط يتقاطعان عند الرأس C.

يسمى $\overleftrightarrow{L}$ محور المخروط والذي يمكن ان نعرّفه بانه (قطعة المستقيم المحددة براس المخروط ومركز قاعدته) ، ويسمى $\overline{AB}$ مولد المخروط والذي يمكن ان نعرّفه بانه (قطعة المستقيم المحددة براس المخروط واحدى نقاط قاعدته).



الشكل 1-2



الشكل 2-2

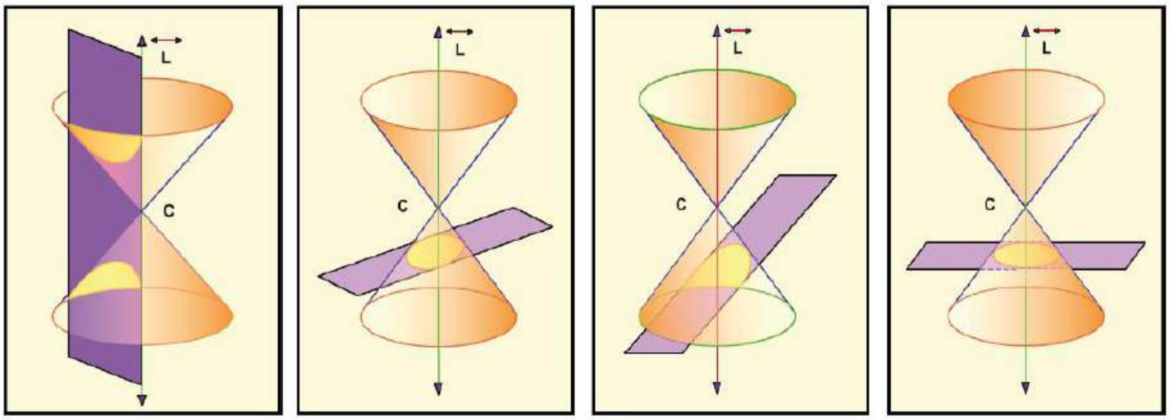
ان الأشكال الهندسية الناتجة من قطع المخروط الدائري القائم بمستوٍ في حالات معيّنة تسمى قطوعاً مخروطية وهي كما يأتي :

(1) الدائرة (Circle): ونحصل عليها من قطع سطح المخروط الدائري القائم بمستوٍ عمود على المحور $\overleftrightarrow{L}$ ويوازي القاعدة، وتكبر هذه الدائرة كلما ابتعدنا عن الراس كما في الشكل 2 – 3 . وقد درسناها في منهج العام المنصرم.

(2) القطع المكافئ (Parabola) : ونحصل عليه من قطع سطح المخروط الدائري القائم بمستوٍ موازٍ لأحد مولداته كما في الشكل 2 – 4 .

(3) القطع الناقص (Ellipse) : ونحصل عليه من قطع سطح المخروط الدائري القائم بمستوٍ غير موازٍ لقاعدته ولا يوازي احد مولداته كما في الشكل 2 – 5 .

(4) القطع الزائد (Hyperbola): ونحصل عليه من قطع سطح المخروط الدائري القائم بمستوٍ موازٍ لمحوره ويقطع مولدين من مولداته كما في الشكل 2 – 6 .



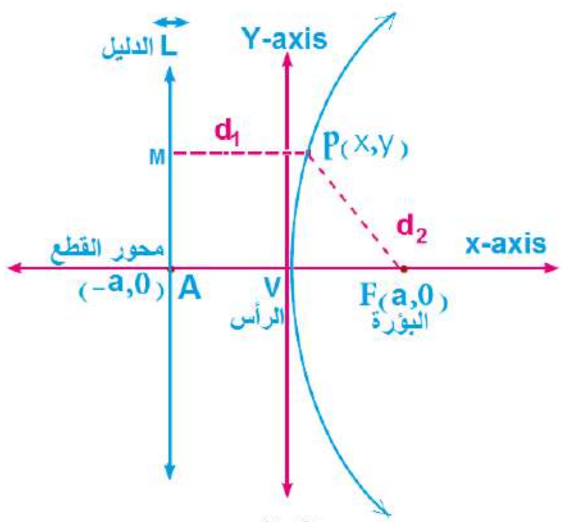
الدائرة الشكل 2-3 | القطع المكافيء الشكل 2-4 | القطع الناقص الشكل 2-5 | القطع الزائد الشكل 2-6

2-2 القطع المكافئ (Parabola)

2-2-1 تعريف القطع المكافئ

هو مجموعة كل النقاط في المستوي والتي يكون بعدها عن نقطة معلومة ثابتة يساوي بعدها عن مستقيم معلوم، النقطة المعلومة تسمى (البؤرة Focus) والمستقيم المعلوم يسمى (الدليل Directrix).

ليكن المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ دليلاً، ولتكن النقطة $F(a,0)$ بؤرة لقطع مكافيء ، لاحظ الشكل 2 – 7 المجاور. أن المستقيم $\overleftrightarrow{AF}$ المرسوم عمودياً من F على الدليل $\overleftrightarrow{L}$ يسمى (محور القطع المكافئ). لتكن V النقطة المنصفة لقطعة المستقيم $\overline{AF}$ ، بما ان بعد V عن $\overleftrightarrow{L}$ يساوي بعدها عن F ، فأن V نقطة واقعة على القطع المكافئ ، يطلق على النقطة V (رأس القطع المكافئ) (Vertix) ، والشكل يوضح أيضاً ان البؤرة تقع داخل القطع المكافئ وان أي قطع مكافئ يقع على جهة واحدة من دليله وهي الجهة التي تقع البؤرة فيها.



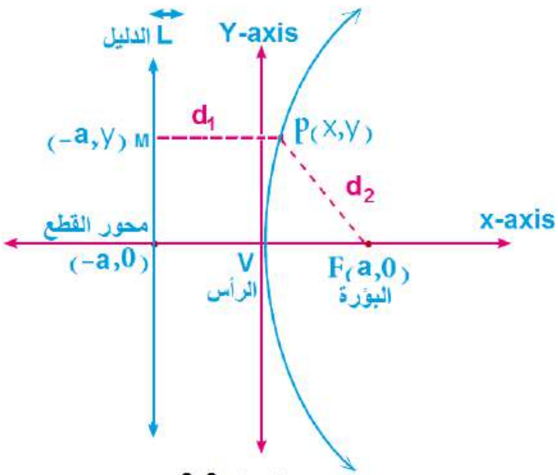
الشكل 7-2

الأن واعتماداً على تعريف القطع المكافئ، اذا كانت $P(x,y)$ اية نقطة على القطع المكافئ وكان $\overline{PM}$ هو العمود النازل على الدليل $\overleftrightarrow{L}$ فأن $PM = PF$ أي ان $d_1 = d_2$ ويمكننا استخدام هذه المساواة لإيجاد معادلة القطع المكافئ.

2-2-2 معادلة القطع المكافئ

أولاً) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ودليله يوازي المحور Y .

لنفرض ان $F(a,0)$ هي بؤرة القطع المكافئ وان راسه نقطة الأصل $V(0,0)$ ودليله يوازي المحور Y والذي معادلته $x = -a$ ويكون محور تماثل القطع المكافئ هذا هو المحور X كما في الشكل $2-8$ المجاور. لنأخذ أية نقطة $P(x,y)$ على القطـــــع المكافئ وننزل $\overline{MP}$ عموداً على الدليل $\overleftrightarrow{L}$ وحسب تعريف القطع المكافئ يكـــــون



الشكل 2-8

$$d_1 = d_2 \Rightarrow \quad PM = PF$$

وباستخدام قانون المسافة بين نقطتين

نحصل على المعادلة الاتية :

$$\sqrt{(x+a)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2}$$

وبتربيع الطرفين ينتج :

$$(x+a)^2 = (x-a)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2ax + a^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2$$

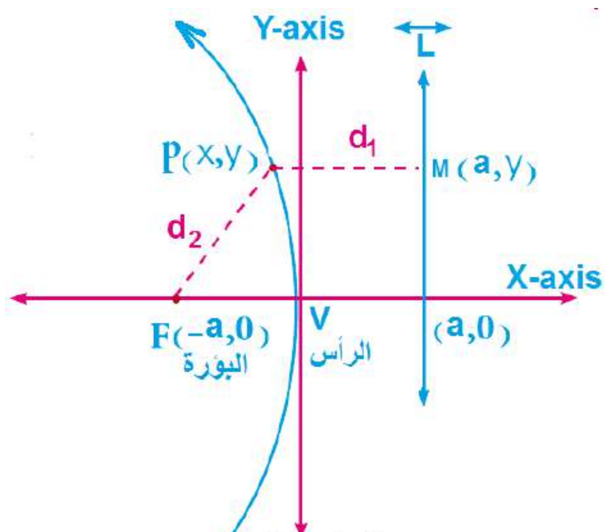
$$y^2 = 2ax + 2ax$$

$$\boxed{\boldsymbol{y^2 = 4ax}} \ldots \quad (1-2)$$

وهي معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(a,0)$ حيث $a > 0$ ودليله $x = -a$ ورأسه نقطة الاصل وتقع بؤرته على الجزء الموجب من المحور X.
أما أذا أخذنا العدد الحقيقي a سالباً فان كل خطوات إشتقاق المعادلة $(1-2)$ تبقى ذاتها ونحصل على المعادلة الاتية :

$$\boxed{\boldsymbol{y^2 = -4ax}} \ldots \quad (2-2)$$

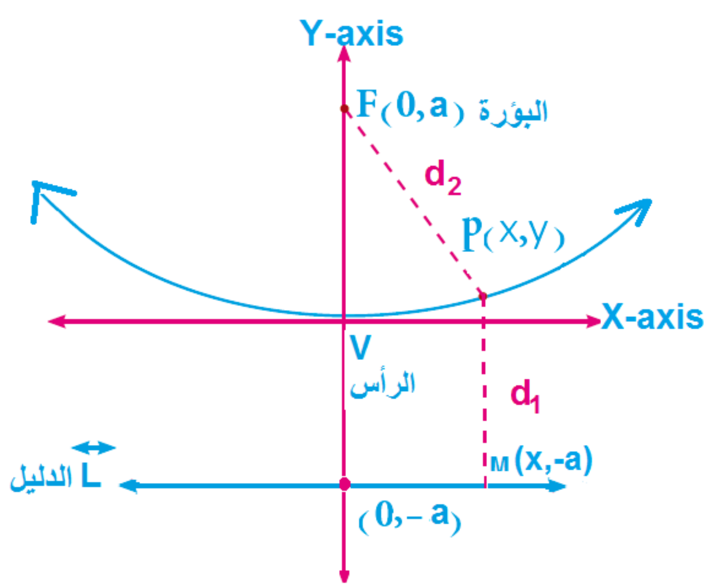
وهي معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(-a,0)$ حيث $a<0$ ودليله $x=a$ ورأسه نقطة الأصل وتقع بؤرته على الجزء السالب من المحور X. كما موضح في الشكل $2-9$ الاتي.



الشكل 2-9

ثانياً) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ودليله يوازي المحور X.

لنفرض ان $F(0,a)$ هي بؤرة القطع المكافئ وان راسه نقطة $V(0,0)$ ودليله يوازي المحور X والذي معادلته هي $y=-a$ ويكون محور تماثل القطع المكافئ هذا هو المحور Y كما في الشكل $2-10$ الاتي :



الشكل 2-10

لنأخذ أية نقطة $P(x,y)$ على القطع المكافئ وننزل $\overline{MP}$ عموداً على الدليل $\overleftrightarrow{L}$ وحسب تعريف القطع المكافئ يكون :

$$d_1 = d_2 \quad \Rightarrow PM = PF$$

$$\sqrt{(x-x)^2+(y+a)^2} = \sqrt{(x-0\ )^2+(y-a)^2}$$

وبتربيع الطرفين ينتج :

$$(y+a)^2 = x^2+(y-a)^2$$

$$y^2+2ay\ +a^2\ = x^2+y^2-2ay\ +a^2$$

$$x^2 = \ 2ay\ +2ay$$

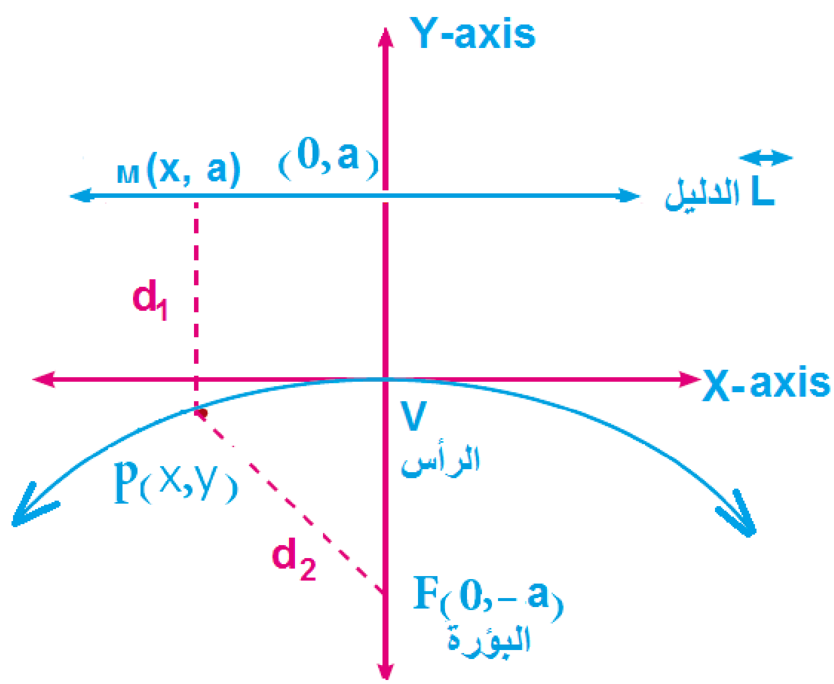
$$\boxed{\boldsymbol{x^2 = 4ay}} \ldots \quad (3-2)$$

وهي معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(0,a)$ حيث $a>0$ ودليله $y=-a$ ورأسه نقطة الاصل وتقع بؤرته على الجزء الموجب من المحور Y.

أما أذا أخذنا العدد الحقيقي a سالباً فان كل خطوات إشتقاق المعادلة $(3-2)$ تبقى ذاتها ونحصل على المعادلة الاتية :

$$\boxed{\boldsymbol{x^2 = -4ay}} \ldots \quad (4-2)$$

وهي معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(0,-a)$ حيث $a<0$ ودليله $y=a$ ورأسه نقطة الاصل ومحوره منطبق على المحور Y وتكون فتحته نحو الأسفل كما موضح في الشكل $2-11$ الاتي.

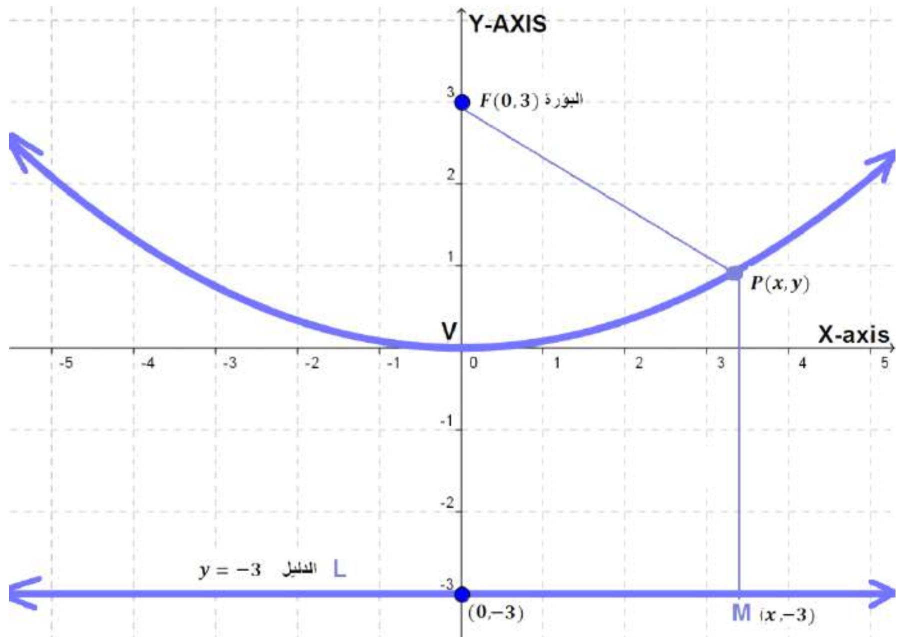


الشكل 11-2

مثال 1) : باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(0,3)$ ورأسه في نقطة الأصل اكتب معادلة الدليل ثم ارسمه.

الحل: حيث ان البؤرة $F(0,3)$ لذلك معادلة الدليل $y=-3$

نأخذ أية نقطة $P(x,y)$ على القطع المكافئ وننزل $\overline{MP}$ عموداً على الدليل $\overleftrightarrow{L}$ كما موضح في الشكل $2-12$ الاتي وحسب تعريف القطع المكافئ يكون $PF=PM$ ولذلك يكون :



الشكل 12-2

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y+3)^2}$$

وبتربيع الطرفين وتبسيطهما ينتج :

$$x^2+(y-3)^2=(y+3)^2$$

$$x^2+y^2-6y+9=y^2+6y+9$$

$$x^2-6y=6y$$

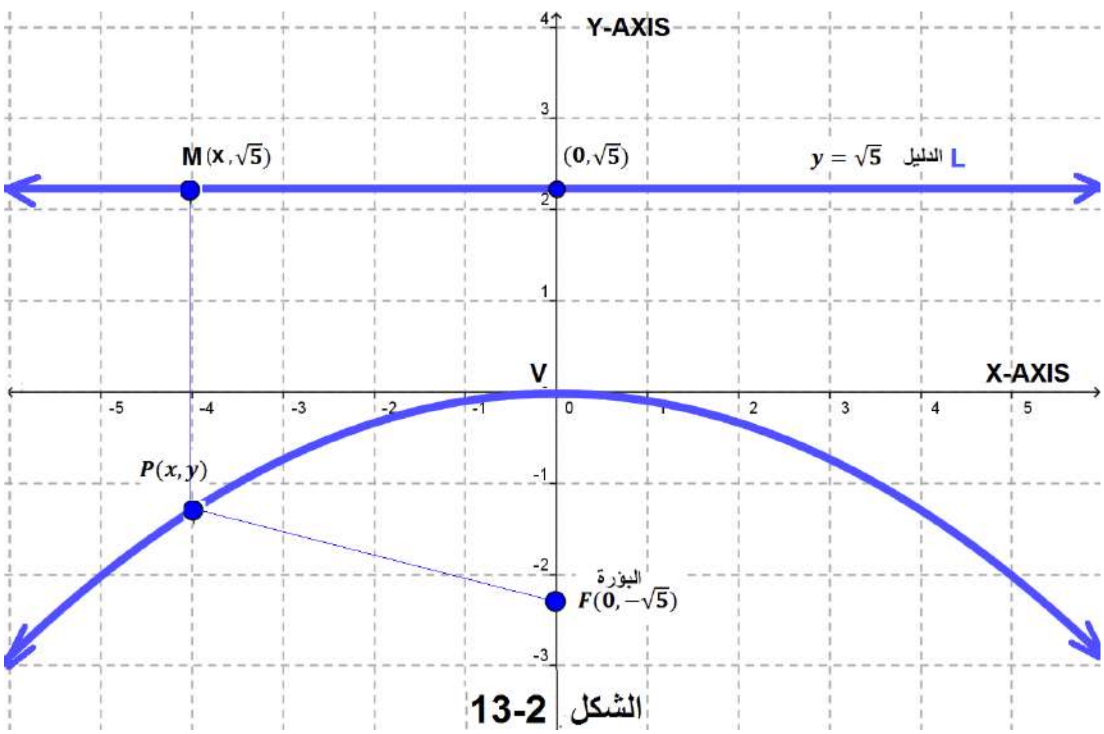
$$x^2=6y+6y$$

$$x^2=12y$$

مثال2) : باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرتـــه $F(0,-\sqrt{5})$ ورأسه في نقطة الأصل اكتب معادلة الدليل ثم ارسمه.

الحل: حيث ان البؤرة $F(0,-\sqrt{5})$ لذلك فان معادلة الدليل $y=\sqrt{5}$

نأخذ أية نقطة $P(x,y)$ على القطع المكافئ وننزل $\overline{MP}$ عموداً على الدليل $\overleftrightarrow{L}$ كما موضح في الشكل $2-13$ الاتي وحسب تعريف القطع المكافئ يكون $PF=PM$ ولذلك يكون :



الشكل 13-2

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(y+\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{(x-x)^2+\left(y-\sqrt{5}\ \right)^2}$$

وبتربيع الطرفين وتبسيطهما ينتج :

$$x^2+\left(y+\sqrt{5}\right)^2=\left(y-\sqrt{5}\right)^2$$

$$x^2+y^2+2\sqrt{5}\,y+\ 5\ =y^2-2\sqrt{5}\,y+5$$

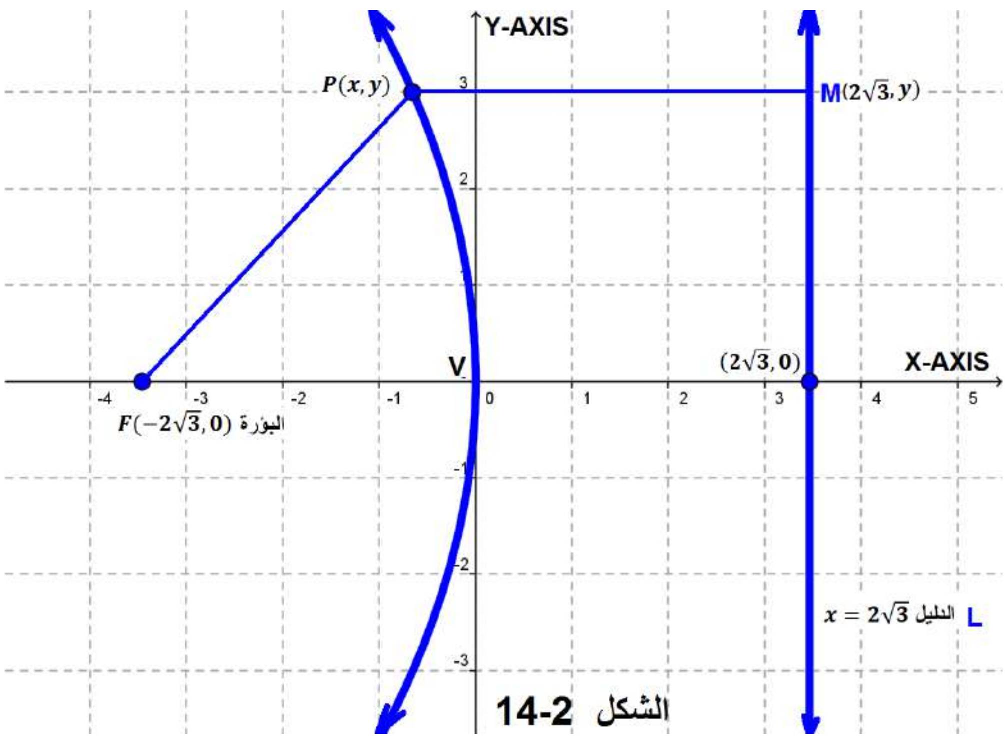
$$x^2=\ -2\sqrt{5}\,y-2\sqrt{5}\,y$$

$$x^2=-4\sqrt{5}\,y$$


مثال 3) : باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(-2\sqrt{3},0)$ ورأسه في نقطة الأصل اكتب معادلة الدليل ثم ارسمه.

الحل: حيث ان البؤرة هي $F(-2\sqrt{3},0)$ لذلك تكون معادلة الدليل $x=2\sqrt{3}$

نأخذ أية نقطة $P(x,y)$ على القطع المكافئ وننزل $\overline{MP}$ عموداً على الدليل $\overleftrightarrow{L}$ كمـــا موضح في الشكل $2-14$ الاتي وحسب تعريف القطع المكافئ يكون $PF=PM$ ولذلك يكون:



الشكل 14-2

$$\sqrt{\left(x+2\sqrt{3}\right)^2+(y-0)^2}=\sqrt{\left(x-2\sqrt{3}\ \right)^2+(y-y)^2}$$

وبتربيع الطرفين وتبسيطهما ينتج: -

$$\left(x+2\sqrt{3}\right)^2+y^2=\left(x-2\sqrt{3}\right)^2$$

$$x^2+4\sqrt{3}x+12+y^2=x^2-4\sqrt{3}x+12$$

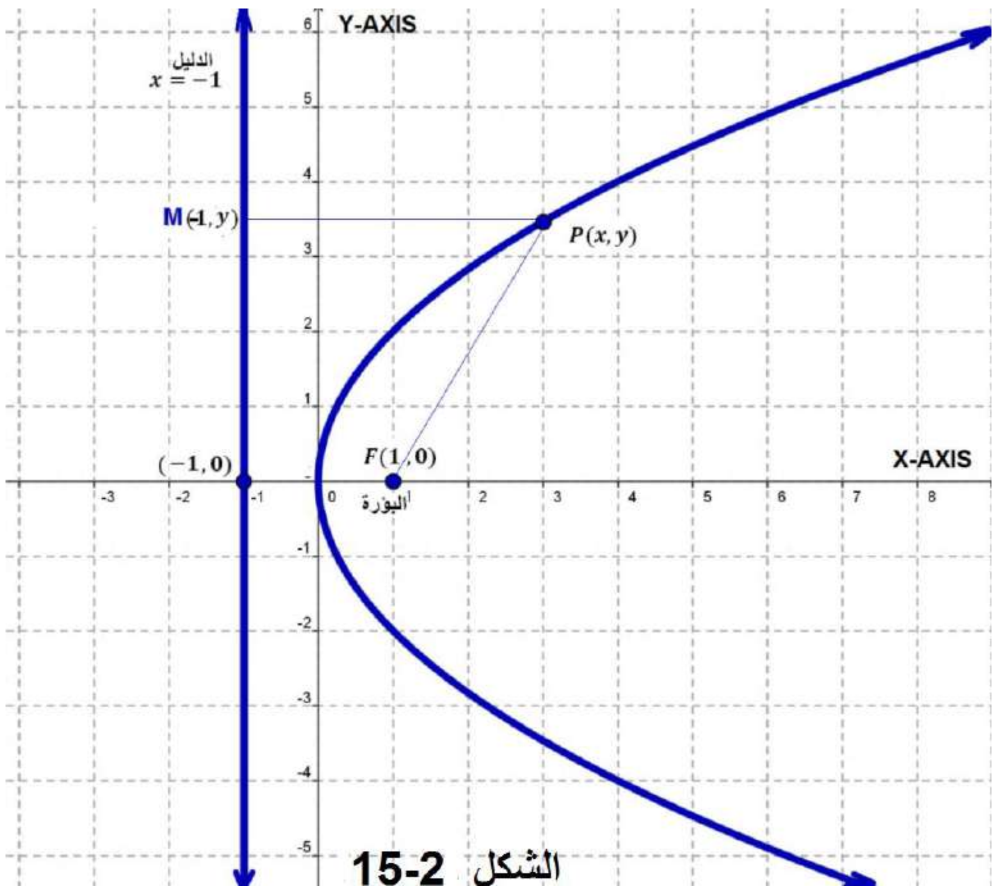
$$y^2=-4\sqrt{3}x-4\sqrt{3}x$$

$$y^2=-\,8\sqrt{3}x$$

مثال 4) : باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرتـــــه $F(1,0)$ ورأسه في نقطة الأصل اكتب معادلة الدليل ثم ارسمه.

الحل: حيث ان البؤرة هي $F(1,0)$ لذلك تكون معادلة الدليل $x = -1$

نأخذ أية نقطة $P(x,y)$ على القطع المكافئ وننزل $\overline{MP}$ عموداً على الدليل $\overleftrightarrow{L}$ كمـــا موضح في الشكل $2 - 15$ الاتي وحسب تعريف القطع المكافئ يكون $PF = PM$ ولذلك يكون :



الشكل 15-2

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-y)^2}$$

وبتربيع الطرفين وتبسيطهما ينتج :

$$(x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$y^2 = 2x + 2x$$

$$y^2 = 4x$$

مثال 5) : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(\frac{3}{2},0)$ وجد معادلة دليله.

الحل : بما ان البؤرة تنتمي للجزء الموجب من المحور x لذلك نستخدم العلاقة:

$$y^2 = 4ax$$

وبتعويض قيمة $a = \frac{3}{2}$ نحصل على معادلة القطع المكافئ وهي :

$$y^2 = 4\left(\frac{3}{2}\right)x$$

$$\therefore y^2 = 6x$$

أما معادلة الدليل فهي: $x = -\frac{3}{2}$

مثال 6) : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(-11,0)$ وجد معادلة دليله.

الحل : بما ان البؤرة تنتمي للجزء السالب من المحور x لذلك نستخدم العلاقة :

$$y^2 = -4ax$$

وبتعويض قيمة $a = 11$ نحصل على معادلة القطع المكافئ وهي:

$$y^2 = -44x$$

أما معادلة الدليل فهي $x = 11$

مثال 7) : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(0,7\sqrt{2})$ وجد معادلة دليله.

الحل : بما ان البؤرة تنتمي للجزء الموجب من المحور y لذلك نستخدم العلاقة

$$x^2 = 4ay$$

وبتعويض قيمة $a = 7\sqrt{2}$ نحصل على معادلة القطع المكافئ وهي:

$$x^2 = 28\sqrt{2}y$$

أما معادلة الدليل فهي $y = -7\sqrt{2}$

مثال8) : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(0,\frac{-1}{2\sqrt{2}})$ وجد معادلة دليله.

الحل : بما ان البؤرة تنتمي للجزء السالب من المحور y لذلك نستخدم العلاقة $(4-2)$ وهي $x^2=-4ay$ وبتعويض قيمة $a=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ نحصل على معادلة القطع المكافئ وهي:

$$x^2=-\frac{4}{2\sqrt{2}}y \;\Rightarrow x^2=-\frac{2}{\sqrt{2}}y \;\Rightarrow\; x^2=-\sqrt{2}y$$

أما معادلة الدليل فهي : $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

مثال9) : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليلـــــــــه $3-2y=0$.

الحل : بما ان معادلة الدليل هي$3-2y=0$ والتي نحصل منها على $\left(y=\frac{3}{2}\right)$ لذلك فان بؤرة القطع المكافئ ستكون $F(0,\frac{-3}{2})$ ، نلاحظ أن البؤرة تنتمي للجزء السالب مــن المحور y لذلك نستخدم العلاقة : $x^2=-4ay$ وبتعويض قيمة $a=\frac{3}{2}$ نحصل على معادلة القطع المكافئ وهي:

$$x^2=-4.\left(\frac{3}{2}\right)y \Rightarrow x^2=-6y$$

مثال 10) : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليـــــله $5x+2=0$.

الحل : بما ان معادلة الدليل هي$5x+2=0$ والتي نحصل منها على $\left(x=\frac{-2}{5}\right)$ لذلك فـان بؤرة القطع المكافئ ستكون $F(\frac{2}{5},0)$ ، نلاحظ أن البؤرة تنتمي للجزء الموجـب مـن المحور x لذلك نستخدم العلاقة : $y^2=4ax$ وبتعويض قيمة $a=\frac{2}{5}$ نحصل على معادلة القطع المكافئ وهي:

$$y^2=4.\left(\frac{2}{5}\right)x \Rightarrow y^2=\frac{8}{5}x$$

مثال 11) : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وتقع بؤرته علـــــــى المحور x ويمر دليله بالنقطة $(-7,11)$.

الحل : بما ان الدليل يمر بالنقطة $(-7,11)$ وتقع البؤرة على المحور x لذلك تكون معادلة الدليل $x = -7$ وبالتالي فان البؤرة هي $F(7,0)$ ، نلاحظ أن البؤرة تنتمي للجزء الموجب من المحور x لذلك نستخدم العلاقة : $y^2 = 4ax$ وبتعويـــــــض قيمة $a = 7$ نحصل على معادلة القطع المكافئ وهي:

$$y^2 = 4.(7x) \Rightarrow y^2 = 28x$$

مثال 12) : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وتقع بؤرته علـــــــى المحور y ويمر دليله بالنقطة $(5,\frac{\sqrt{3}}{2})$.

الحل : بما ان الدليل يمر بالنقطة $(5,\frac{\sqrt{3}}{2})$ وتقع البؤرة على المحور y لذلك تكون معادلة الدليـــل $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ وبالتالي فان البؤرة هي $F(0,\frac{-\sqrt{3}}{2})$ ، نلاحظ أن البؤرة تنتمي للجزء السالب من المحور y لذلك نستخدم العلاقة : $x^2 = -4ay$ وبتعويض قيمة $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ نحصل على معادلة القطع المكافئ وهي:

$$x^2 = (-4).\frac{\sqrt{3}}{2}y \Rightarrow x^2 = -2\sqrt{3}y$$

مثال 13) : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(5,-2)$ ودليله يوازي المحور x .

الحل: بما ان الدليل يوازي المحور x فأن البؤرة تنتمي إلى المحور y لذلك نستخدم العلاقة $x^2 = -4ay$ وبما ان القطع المكافئ يمر بالنقطة $(5,-2)$ فان هذه النقطة تحقق معادلته أي أننا نعوض فيها $x = 5, y = -2$ لنحصل على :

$$(5)^2 = -4\,a.(-2)$$

$$25 = 8a \Rightarrow a = \frac{25}{8}$$

وبتعويض قيمة $a = \frac{25}{8}$ في العلاقة أعلاه نحصل على معادلة القطع المكافئ وهي:

$$x^2 = -4.\left(\frac{25}{8}\right)y \Rightarrow x^2 = -\frac{25}{2}y$$

مثال 14) : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمربالنقطة $(-1,-1)$ ودليله يوازي المحور y.

الحل: بما ان الدليل يوازي المحور y فأن البؤرة تنتمي إلى المحور x لذلك نستخدم العلاقة $y^2 = -4ax$ وبما ان القطع المكافئ يمر بالنقطة $(-1,-1)$ فان هذه النقطة تحقق معادلته أي أننا نعوض فيها $x=-1, y=-1$ لنحصل على :

$$(-1)^2 = -4\,a.(-1) \Rightarrow \quad 1 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

وبتعويض قيمة $a = \frac{1}{4}$ في العلاقة أعلاه نحصل على معادلة القطع المكافئ وهي:

$$y^2 = -4 \times \left(\frac{1}{4}\right)x \Rightarrow y^2 = -x$$

مثال 15) : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين الأتيتين : $\left(2\sqrt{2},\sqrt{2}\right),\left(2\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$

الحل: بما ان النقطتين متناظرتان حول الجزء الموجب من المحور x لذلك فان بؤرة القطع المكافئ تنتمي إلى الجزء هذا ولذلك نستخدم العلاقة $y^2 = 4ax$ كما ان أي من هاتين النقطتين يمكن ان تحقق معادلته أي أننا نعوض فيها $x = 2\sqrt{2}\,, y = \sqrt{2}$ لنحصل على :

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 4a \times 2\sqrt{2}$$

$$2 = 8\sqrt{2}\,a \Rightarrow a = \frac{2}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

وبتعويض قيمة $a = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ في العلاقة أعلاه نحصل على معادلة القطع المكافئ وهي:

$$y^2 = 4 \times \frac{1}{4\sqrt{2}}x \Rightarrow y^2 = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

مثال 16) : جد بؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ الذي معادلته $x - \frac{1}{8}y^2 = 0$ وأرسمه.

الحل :

$$x - \frac{1}{8}y^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{8}y^2 \qquad \ldots (\times\ 8)$$

$$8x = y^2 \Rightarrow y^2 = 8x$$

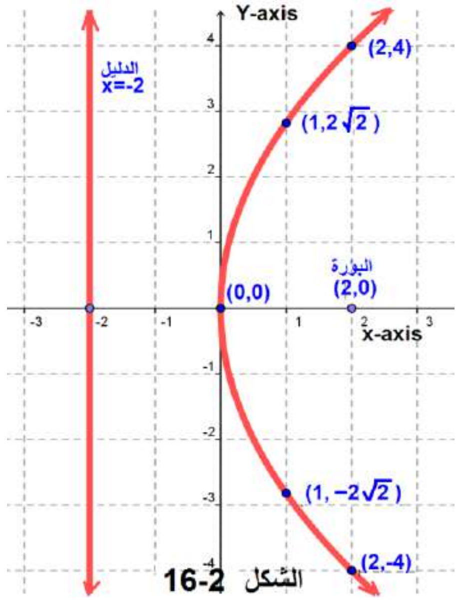
بالمقارنة مع الصيغة القياسية $\boxed{y^2 = 4\,a\,x}$ نتوصل الى ان :

$$4a = 8 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{8}{4} = 2$$

لذلك تكون بؤرة القطع المكافئ هي $F(2,0)$ ومعادلة دليله هي $x = -2$ ولأجل تمثيل القطع المكافئ بيانياً ننظم الجدول الاتي :

x	0	1	2
y	0	$\pm 2\sqrt{2}$	± 4

ويكون التمثيل البياني للقطع المكافي كما في الشكل $2 - 16$ المجاور:



مثال 17) : جد إحداثيي بؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ الذي معـــــادلته $x^2 + 16y = 0$ وأرسمه

الحل :

$$x^2 + 16y = 0$$
$$x^2 = -16y$$

بالمقارنة مع الصيغة القياسية $\boxed{x^2 = -4a\,y}$ نتوصل إلى ان :

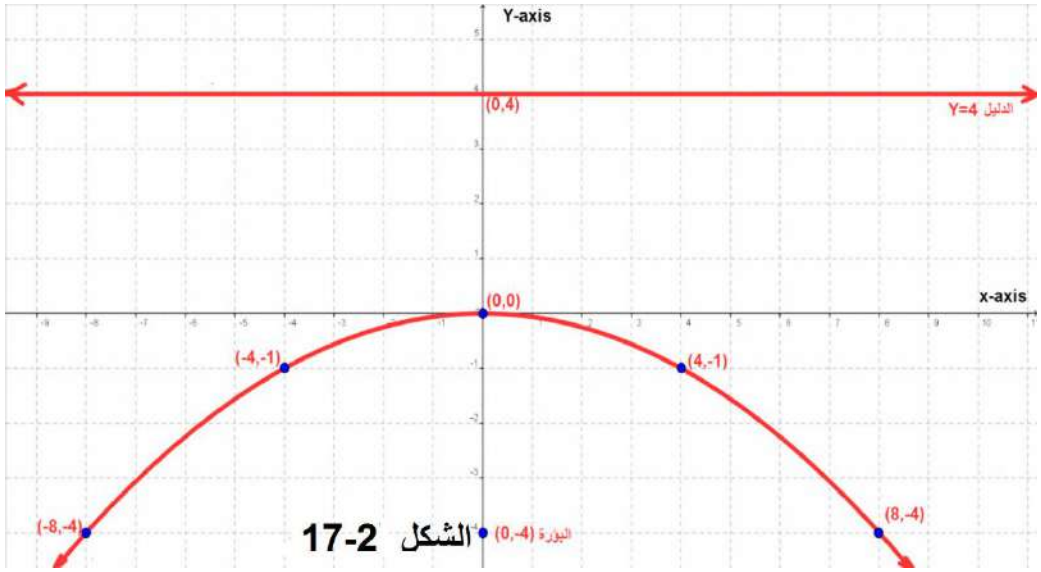
$$-4a = -16 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-16}{-4} = 4$$

لذلك تكون بؤرة القطع المكافئ هي $F(0,-4)$ ومعادلة دليله هي $y = 4$

ولأجل تمثيل القطع المكافئ بيانياً ننظم الجدول الاتي :

x	0	± 4	± 8
y	0	-1	-4

ويكون التمثيل البياني للقطع المكافي كما في الشكل $2 - 17$ الاتي:



الشكل 17-2

تمرين (1-2)

1. جد البؤرة ومعادلة الدليل للقطوع المكافئة الأتية ثم مثلها بيانياً.

$a)\quad x^2+4y=0$ $b)\quad y^2-6x=0$

$c)\quad x^2=-24y$ $d)\quad y^2=20x$

$e)\quad x^2=y$ $f)\quad -x^2-y=0$

2. جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(-2,1)$,$(2,1)$ ورأسه في نقطة الأصـــل.

3. جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطة $(-3,\sqrt{2})$ وبؤرته تنتمي الى المحور X ورأسه في نقطة الأصل.

4. جد معادلة القطع المكافئ الذي دليله يمر بالنقطة $(-\frac{1}{2},5)$ وبؤرته تنتمي إلى المحور Y ورأسه في نقطة الأصل.

5. جد معادلة القطع المكافئ الذي دليله يمر بالنقطتين $(\frac{2}{5},-\frac{1}{3})$ ،$\left(\frac{2}{5},\frac{1}{3}\right)$ ورأسه في نقطة الاصل

6. جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(-3,-4)$ ،$(-2,3)$ ورأسه في نقطة الأصل .

3-2 القطع الناقص (Ellipse)

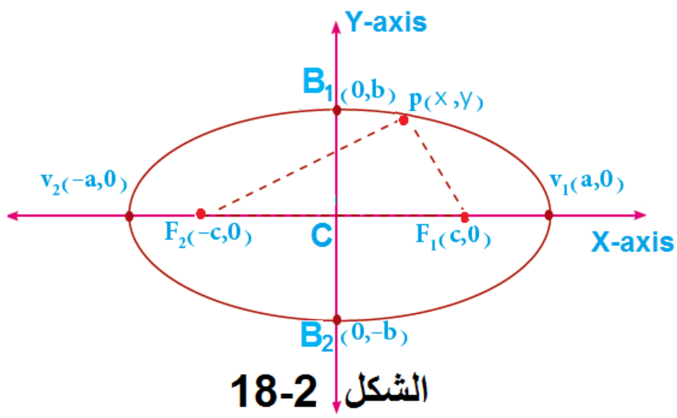
1-3-2 تعريف القطع الناقص

هو مجموعة كل النقاط في المستوي والتي يكون مجموع بعدي كل منها عن نقطتين معلومتين تساوي عدداً ثابتاً ، كل من النقطتين المعلومتين تسمى (البؤرة Focus)، كما تسمى النقطة المنصفة للمسافة بين البؤرتين (مركز القطع الناقص Center).

لاحظ الشكل $2-18$ الاتي حيث ان النقطتين الثابتتين F_1، F_2 تسميان بؤرتي القطع الناقص.
التعريف ينص على ان لأي نقطة على المنحني في القطع الناقص مثل $P(x, y)$ يكون :

$$\boxed{PF_1 + PF_2 = 2a} \quad \text{اي} \quad d_1 + d_2 = 2a$$

حيث $2a$ هو العدد الثابت. النقطة c التي هي منتصف المسافة بين البؤرتين هي المركز، والنقطتان V_1, V_2 هما رأسا القطع الناقص ، والنقطتان B_1, B_2 هما قطبا القطع الناقص. أما القطعة المستقيمة $\overline{V_1V_2}$ فهي تمثل المحور الكبير والقطعة المستقيمة $\overline{B_1B_2}$ تمثل المحور الصغير.

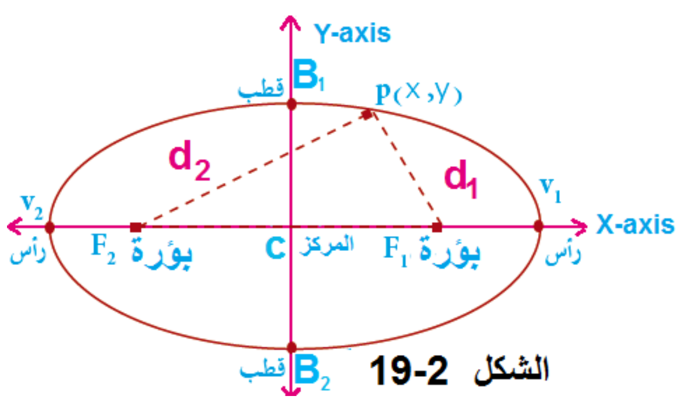


الشكل 2-18

2-3-2 معادلة القطع الناقص

أولاً) معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه ينتميان إلى المحور X.

لنفرض ان إحداثيات البؤرتين هي $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$ ، وأن البعد الثابت $2a$. لتكن $P(x, y)$ أية نقطة على القطع الناقص وبموجـــب التعريف يكون $PF_1 + PF_2 = 2a$
لاحظ الشكل $2-19$ الاتي:



الشكل 2-19

ولما كان : $PF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad , \quad PF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

فأن : $d_1 + d_2 = 2a$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

وبتربيع الطرفين

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

وبحذف y^2 من الطرفين

$$(x-c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2$$

وبفتح الأقواس (مربع حدانية)

$$x^2 - 2xc + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2$$

وبحذف x^2, c^2 من الطرفين

$$-2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} + 2xc$$

$$-4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}$$

وبقسمة المعادلة على (4) نحصل على : $-xc - a^2 = -a.\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}$

(أبدال طرفي المعادلة) $a\,.\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} = xc + a^2$

وبتربيع طرفي المعادلة مرة ثانية

$$a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) = (xc + a^2)^2$$

$$a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = x^2c^2 + 2a^2xc + a^4$$

وبحذف المقدار $2a^2xc$ من الطرفين

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = x^2c^2 + a^4 \Rightarrow a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$\boxed{x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2\,(a^2 - c^2)} \ldots (1)$$

وبما أن $a > c$ دائماً فأن $a^2 - c^2 > 0$ وبفرض ان $a^2 - c^2 = b^2$ حيث $b > 0$

$$\boxed{b^2 = a^2 - c^2} \ldots \quad (2)$$

وبتعويض (2) في (1) نحصل على : $x^2b^2 + a^2y^2 = a^2\,b^2$

وبقسمة طرفي المعادلة على a^2b^2 نحصل على :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ldots \quad (5-2)}$$

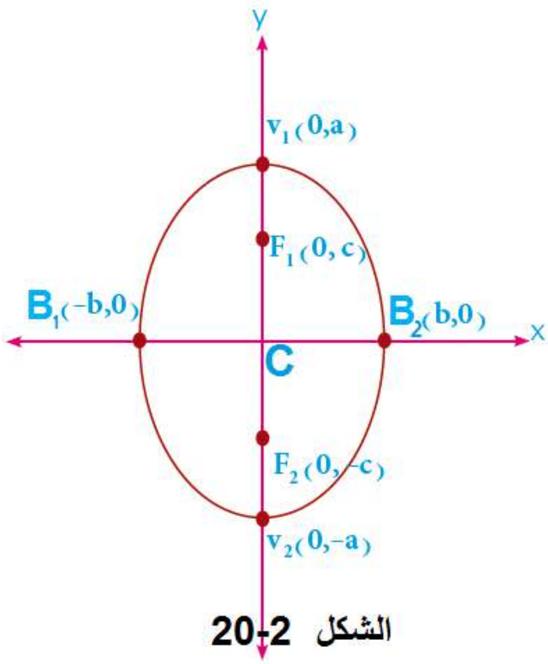
وهي المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي بؤرتاه ينتميان إلى المحور X ومركزه نقطة الاصل.

ثانياً) معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه ينتميان إلى المحور Y.

لنفرض ان إحداثيات البؤرتين هي $F_1(0,c), F_2(0,-c)$ لاحظ الشكل $2-20$ الاتي :

نستطيع بطريقة مماثلة الحصول على معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه ينتميان إلى المحور Y ومركزه نقطة الاصل .

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \ldots \quad (6-2)}$$



الشكل 2-20

ملاحظات هامة :

في القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوراه منطبقان على المحورين الاحداثيين :

1) طول المحور الكبير $2a$
2) طول المحور الصغير $2b$
3) المسافة بين البؤرتين $2c$
4) $\boxed{c^2=a^2-b^2}$
5) البؤرتان والراسان دائماً على نفس المحور بينما يقع القطبان في المحور المخالف للبؤرتين والرأسين.
6) $a>c \ , \ a>b$
7) الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}<1$
8) أنصاف الأقطار البؤرية هي كل من $\overline{PF_2} \ , \ \overline{PF_1}$
9) مساحة القطع الناقص $A=ab\pi$
10) محيط القطع الناقص : $P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

مثال 18) : قطع ناقص معادلته $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ جد إحداثيات رأسيه وبؤرتيه وقطبيه وطول كل من محوريه والمسافة بين بؤرتيه ومقدار اختلافه المركزي ثم استخرج مساحته ومحيطه.

الحل: بالمقارنة مع الصيغة القياسية $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ نستطيع ان نتوصل إلى ان :

احداثيي الرأسين $a^2=25 \quad \Rightarrow \quad a=\pm 5 \quad \Rightarrow V_1(5,0), V_2(-5,0)$

احداثيي القطبين $b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4 \Rightarrow B_1(0,4), B_2(0,-4)$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9 \quad \Rightarrow \quad c = \pm 3$$

إحداثيي البؤرتين : $F_1(3,0), F_2(-3,0)$

طول المحور الكبير : $2a = 2 \times 5 = 10$ وحدة طول

طول المحور الصغير : $2b = 2 \times 4 = 8$ وحدة طول

المسافة بين بؤرتيه: $2c = 2 \times 3 = 6$ وحدة طول

الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0.6 < 1$

المساحة : $A = ab\pi = 5 \times 4 \times \pi = 20\pi$ وحدة مربعة

المحيط :

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{25 + 16}{2}} = 2\sqrt{\frac{41}{2}}\,\pi$$ وحدة طول

مثال 19) : قطع ناقص معادلته $25x^2 + 9y^2 = 225$ جد إحداثيات رأسيه وبؤرتيه وقطبيه وطول كل من محوريه والمسافة بين بؤرتيه ومقدار اختلافه المركزي ثم استخرج مساحته ومحيطه.

الحل: $25x^2 + 9y^2 = 225$

بقسمة طرفي المعادلة على 225 نحصل على : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

بالمقارنة مع الصيغة القياسية $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ نستطيع ان نتوصل إلى ان :

إحداثيي الرأسين $a^2 = 25 \Rightarrow a = \pm 5 \Rightarrow V_1(0,5), V_2(0,-5)$

احداثيي القطبين $b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3 \Rightarrow B_1(3,0), B_2(-3,0)$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \quad \Rightarrow \quad c = 4$$

إحداثيي البؤرتين : $F_1(0,4), F_2(0,-4)$

طول المحور الكبير : $2a = 2 \times 5 = 10$ وحدة طول

طول المحور الصغير : $2b = 2 \times 3 = 6$ وحدة طول

المسافة بين بؤرتيه: $2c = 2 \times 4 = 8$ وحدة طول

الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8 < 1$

المساحة : $A = ab\pi = 5 \times 3 \times \pi = 15\pi$ وحدة مربعة

المحيط :

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{25 + 9}{2}} = 2\sqrt{17}\,\pi$$ وحدة طول

مثال 20) : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحداثيي بؤرتاه $F_1\,(0,10), F_2(0,-10)$ وإحداثيي قطباه $B_1(3,0), B_2(-3,0)$.

الحل:

$$c = 10 \Rightarrow c^2 = 100$$

$$b = 3 \Rightarrow b^2 = 9$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$100 = a^2 - 9$$

$$a^2 = 109$$

وبما ان البؤرتان واقعتان على المحور Y نعوض القيم الناتجة في الصيغة القياسية :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{109} = 1$$

مثال 21) : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحداثيي بؤرتاه $F_1(16,0), F_2(-16,0)$ ، وإحداثيي رأساه $V_1(25,0), V_2(-25,0)$.

الحل:

$$c = 16 \Rightarrow c^2 = 256$$

$$a = 25 \Rightarrow a^2 = 625$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 256 = 625 - b^2$$

$$b^2 = 625 - 256 = 369$$

وبما ان البؤرتان واقعتان على المحور X نعوض القيم الناتجة في الصيغة القياسية :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{369} = 1$$

مثال 22) : أكتب معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه يقعان على المحور X أذا علمت أن أحدى بؤرتيه تبعد عن رأسيه بمقدار $2,\ 8$ وحدات على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الإحداثيين.

الحل :

$$2a = 2 + 8 = 10$$

$$a = 5 \Rightarrow a^2 = 25$$

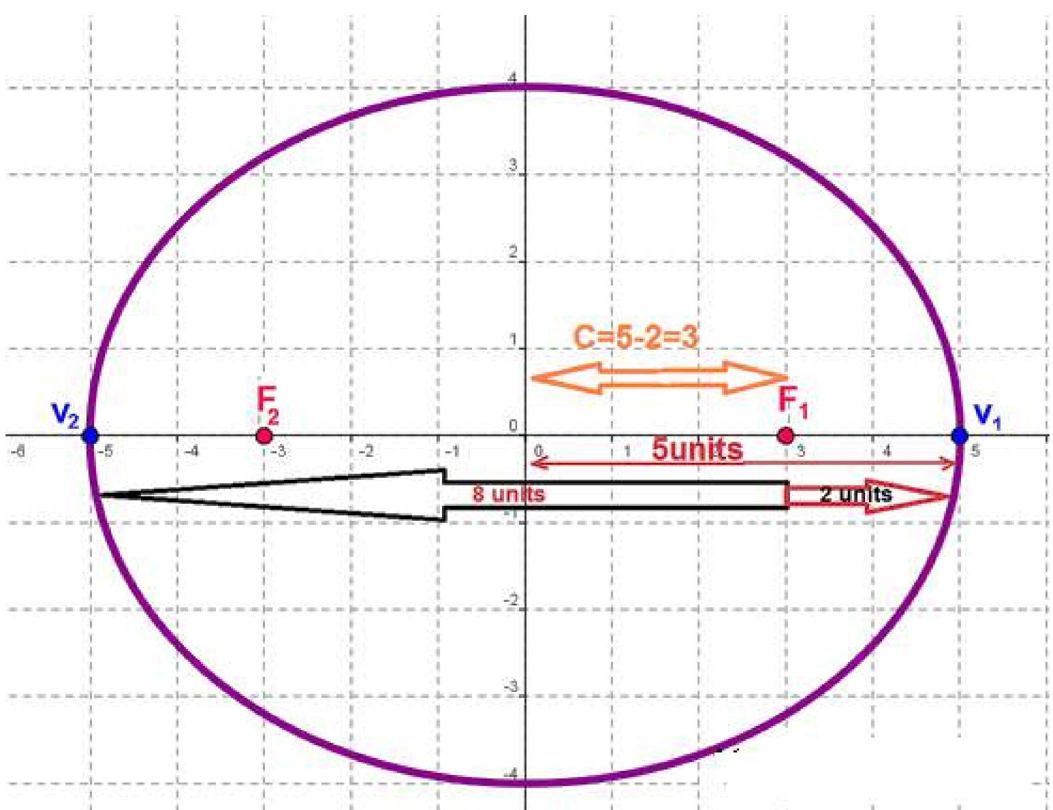
$$c = 5 - 2 = 3 \Rightarrow c^2 = 9$$

$$\because \quad c^2 = a^2 - b^2$$

$$9 = 25 - b^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 9 = 16$$

وبما ان البؤرتان واقعتان على المحور X فان القانون المناسب هو

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$



الشكل 2-21

مثال 23) : جد معادلة القطع الناقص الذي يقطع من المحور Y جزءاً طوله 20 وحدة ومن المحور X جزءاً طوله 10 وحدات.

الحل: حيث ان الجزء المقطوع من المحور Y أكبر من الجزء المقطوع من المحور X لـذلك فان بؤرتي القطع الناقص ينتميان إلى المحور Y

$$2a = 20 \Rightarrow a = 10 \Rightarrow a^2 = 100$$

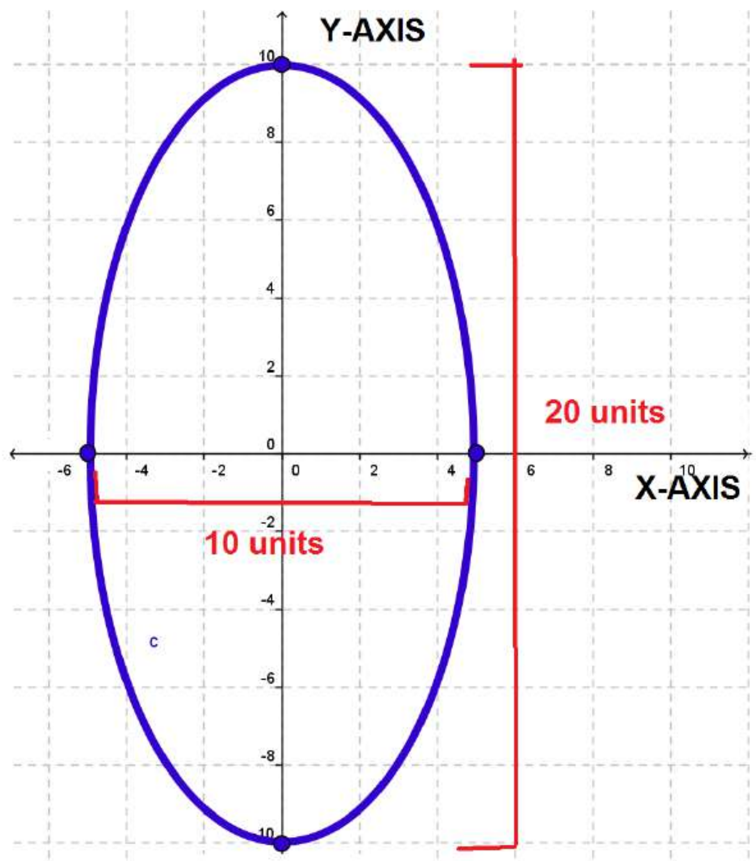
$$2b = 10 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow b^2 = 25$$

بما ان البؤرتان تنتميان إلى المحور Y فان المعادلة القياسية للقطع الناقص هي :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$$



الشكل 2-22

مثال 24) : قطع ناقص معادلته $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ أثبت ان النقطة $P(3,4)$ تنتمي له ثم جد طولي نصفي القطرين البؤريين للقطع المرسومين من P.

الحل : لأثبات ان النقطة $P(3,4)$ تنتمي للقطع الناقص لا بد لنا من ان ندقق انها تحقق معادلته ويتم ذلك بتعويض $x=3, y=4$ في المعادلة والحصول على عبارة رياضية صائبة ، أي :

$$\frac{3^2}{45}+\frac{4^2}{20}=1$$

$$\frac{9}{45}+\frac{16}{20}=1 \Rightarrow \frac{1}{5}+\frac{4}{5}=1 \Rightarrow \frac{5}{5}=1$$

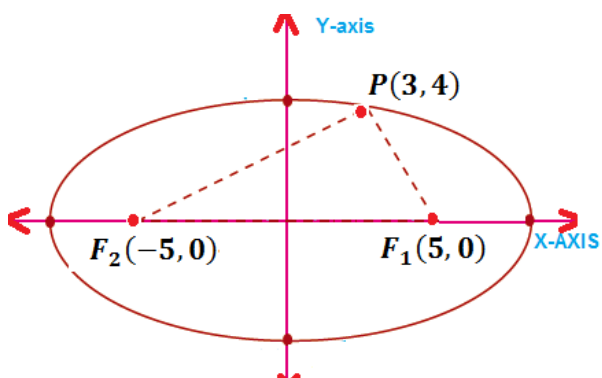
وهي عبارة رياضية صائبة مما يعني ان النقطة $P(3,4)$ تنتمي للقطع الناقـــص.

ولإيجاد طولي نصفي القطرين البؤريين للقطع المرسومين من النقطة لا بد لنا أولاً من استخراج بؤرتي القطع الناقص وكما يأتي :

$$a^2=45, \quad b^2=20$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 45-20=25 \Rightarrow c=\pm 5$$

أي ان بؤرتي القطع الناقص هي: $F_1(5,0), F_2(-5,0)$.



الشكل 2-23

$$PF_1 = \sqrt{(3-5)^2+(4-0)^2}$$

$$PF_1 = \sqrt{4+16}=\sqrt{20}$$

وحدة $PF_1 = 2\sqrt{5}$ (نصف القطر البؤري الصغير)

$$PF_2 = \sqrt{(3+5)^2+(4-0)^2}$$

$$PF_2 = \sqrt{64+16}=\sqrt{80}$$

وحدة $PF_2 = 4\sqrt{5}$ (نصف القطر البؤري الكبير)

3-3-2 رسم القطع الناقص

لرسم القطع الناقص لابد من اتباع الخطوات الأتية :

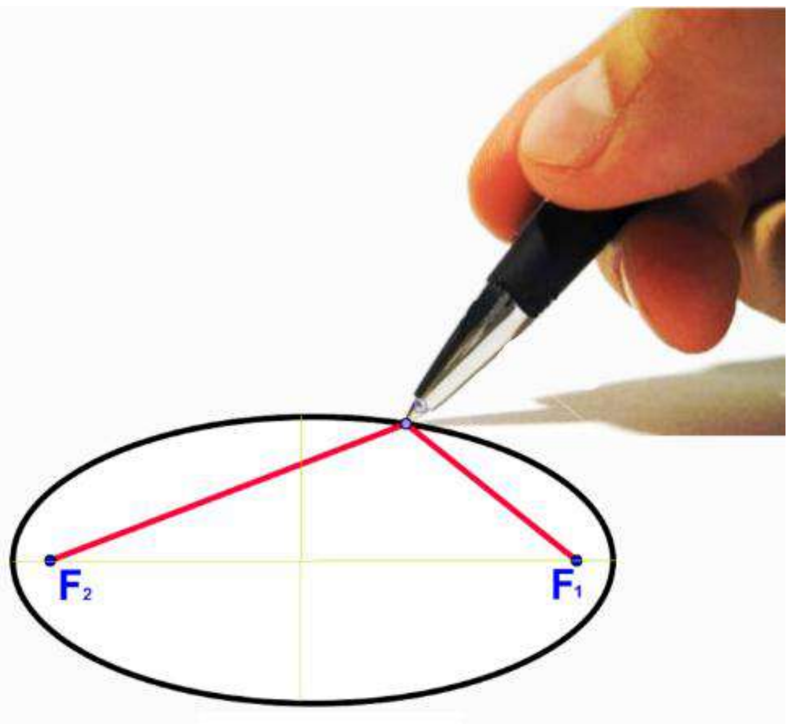
1) نعين على المستوي الإحداثي موقع الرأسين $V_1(a,0), V_2(-a,0)$ أو $V_1(0,a), V_2(0,-a)$ حسب الحالة.

2) نعين على المستوي الإحداثي موقع القطبين $B_1(b,0), B_2(-b,0)$ أو $B_1(0,b), B_2(0,-b)$ حسب الحالة.

3) نصل بين النقاط الأربع V_1, B_1, V_2, B_2 على الترتيب بمنحني متصل .

4) نعين على المستوي الإحداثي موقع البؤرتين $F_1(c,0), F_2(-c,0)$ أو $F_1(0,c), F_2(0,-c)$ حسب الحالة .

كما يمكن رسم القطع الناقص عملياً بأخذ خيط طوله أكبر من $\overline{F_1F_2}$. لاحظ الشكل $2-24$ أدناه حيث تمثل كل من F_1, F_2 بؤرتي القطع الناقص. ثم نثبت رأسي الخيط عليهما ، ثم يشد الخيط برأس قلم ويحرك على الورقة بحيث يكون الخيط مشدوداً فينتج شكل القطع الناقص.



الشكل 2-24

تمرين (2-2)

1. جد إحداثيات الرأسين والبؤرتين والقطبين وطول كل من المحورين والمسافة بين البؤرتين ومقدار الاختلاف المركزي ثم استخرج المساحة والمحيط لكل من القطوع الناقصة الأتية: -

   a) $4x^2 + 36y^2 = 144$

   b) $3x^2 + 2y^2 = 24$

   c) $25x^2 + 16y^2 = 400$

   d) $6x^2 + 4y^2 = 24$

   e) $x^2 + 4y^2 = 16$

2. جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بنقطتي تقاطع المستقيم الذي معادلته $8x + 4y = 16$ مع المحورين الاحداثيين ثم أرسمه.
3. جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تنتميان إلى المحور X والمسافة بين بؤرتيه تساوي 6 وحدات ومجموع طولي محوريه يساوي 18 وحدة ثم أرسمه.
4. جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل الذي طول محوره الكبيريساوي 20 وحدة ومحيط المثلث المحدد ببؤرتيه والنقطة $h(x, y)$ التي تنتمي للقطع يساوي 32 وحدة اذا علمت ان بؤرتيه ينتميان للمحور X .
5. جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره الصغير المنطبق على المحور Y يساوي 6 وحدات ويمر بالنقطة (5,0) ثم أرسمه.
6. جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $x^2 = 8y$ وطول محوره الكبير يساوي 16 وحدة ثم أرسمه.
7. جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تنتميان إلى المحور Y وطول محوره الكبير يساوي 6 وحدات والبعد بين بؤرتيه يساوي 4 وحدات.

4-2 القطع الزائد (Hyperbola)

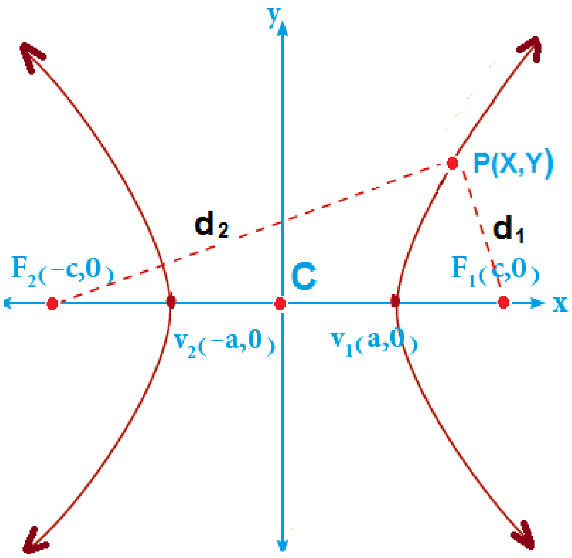
1-4-2 تعريف القطع الزائد

هو مجموعة كل النقاط في المستوي والتي يكون القيمة المطلقة لفرق بعدي أي منها عن نقطتين معلومتين تساوي عدداً ثابتاً ، كل من النقطتين المعلومتين تسمى (البؤرة Focus) كما تسمى النقطة المنصفة للمسافة بين البؤرتين (مركز القطع الزائد Center).

لاحظ الشكل $2-25$ الآتي حيث ان النقطتين الثابتتين F_1, F_2 تسميان بؤرتي القطع الزائد.
التعريف ينص على ان لأي نقطة على المنحني في القطع الزائد مثل $P(x,y)$ يكون :

$$\boxed{|\mathrm{PF}_1 - \mathrm{PF}_2| = 2a}$$

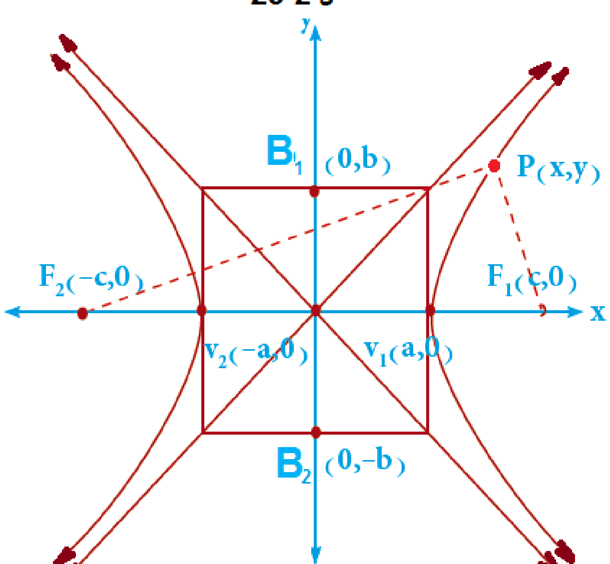
اي ان : $|\mathrm{d}_1 - \mathrm{d}_2| = 2a$ حيث $2a$ هو العدد الثابت.



الشكل 2-25

ويسمى كل من F_1, PF_2 بـ (نصفي القطرين البؤريين المرسومين من النقطة P).
وتسمى المسافة بين البؤرتين (البعد البؤري) ،بينما تسمى النقطة c التي هي منتصف المسافة بين البؤرتين بـ (المركز) ، كما ان نقطتي تقاطع المحور الرئيس مع القطع الزائد وهما النقطتان V_1, V_2 تسميان رأسي القطع الزائد . أما القطعة المستقيمة $\overline{V_1V_2}$ فهي تمثل المحور الحقيقي وطوله يساوي $2a$ أما المحور العمودي على المحور الحقيقي والمار بمركز القطع فانه يسمى (المحور التخيلي) أو (المحور المرافق) وطوله يساوي $2b$

.



الشكل 2-26

ولا بد لنا من الإشارة إلى ان رسم القطع الزائد يستوجب رسم مستطيل يمر بالرأسين وأضلاعه توازي المحورين ، ويقطع المحور التخيلي بنقطتين تسمى (القطبين) ويكون قطرا هذا المستطيل محاذيين للمنحني الذي يمثل القطع الزائد. لاحظ الشكل $2-26$ الاتي.

2-4-2 معادلة القطع الزائد

أولاً) معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تنتميان إلى المحور X.

لنفترض ان إحداثيات البؤرتين هي $F_1(c,0), F_2(-c,0)$ ، وأن البعد الثابت $2a$.

لتكن $P(x,y)$ أية نقطة على القطع الزائد وبموجب التعريف يكون :

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

لاحظ الشكل $26-2$ في الصفحة السابقة ولما كان :

$$d_1 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}, \quad d_2 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

فأن :

$$|d_1 - d_2| = 2a$$

$$d_1 - d_2 = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

وبتربيع الطرفين نحصل على :

$$(x-c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2+y^2$$

وبحذف y^2 من الطرفين نحصل على :

$$(x-c)^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2$$

وبفتح الأقواس (مربع حدانية) نحصل على :

$$x^2-2xc+c^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{x^2+2xc+c^2+y^2} + x^2+2xc+c^2$$

وبحذف x^2, c^2 من الطرفين نحصل على:

$$-2xc = 4a^2 \pm 4a\sqrt{x^2+2xc+c^2+y^2} + 2xc$$

$$-4xc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{x^2+2xc+c^2+y^2}$$

وبقسمة المعادلة على (-4) ينتج :

$$xc + a^2 = \pm\, a\sqrt{x^2+2xc+c^2+y^2}$$

وبتربيع طرفي المعادلة مرة ثانية نحصل على :

$$x^2c^2 + 2xca^2 + a^4 = a^2(x^2+2xc+c^2+y^2)$$

وبأجراء عملية فتح القوس وأبدال الطرفين نتوصل إلى :

$$a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = x^2c^2 + 2a^2xc + a^4$$

وبحذف المقدار $2a^2xc$ من الطرفين نحصل على :

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = x^2c^2 + a^4$$

$$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2\,(a^2 - c^2) \;...\,(1)$$

ومن الشكل 17 − 2 نلاحظ ان

$c > 0, a > 0,\ c > a$ لذلك يكون $^2 - a^2 > 0$ وبالتالي $a^2 - c^2 < 0$

وبفرض ان $c^2 - a^2 = b^2$ حيث $b > 0$ يكون

$$\boxed{a^2 - c^2 = -b^2} \;...\;\; (2)$$

وبتعويض (2) في (1) ينتج :

$$-x^2b^2 + a^2y^2 = -a^2\,b^2$$

وبقسمة طرفي المعادلة على $-a^2b^2$ نتوصل الى :

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}} - \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}} = \mathbf{1} \;...\quad (7-2)}$$

وهي المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي بؤرتاه تنتميان إلى المحور X ومركزه نقطة الاصل.
ويمكن استخراج معادلة المستقيمين المحاذيين باستبدال الطرف الأيمن في معادلة القطع الزائد بالعدد 0 بدل العدد1 وكما يأتي :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{y} = \pm\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{x}} \;...\quad (1-7-2)$$

ثانياً) معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه ينتميان إلى المحور $\boldsymbol{Y}$.

لنفرض ان إحداثيات البؤرتين هي $F_1(0, c), F_2(0, -c)$ ، نستطيع بطريقة مماثلة الحصول على معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنتميان إلى المحور Y ومركزه نقطة الاصل .

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{a^2}} - \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{b^2}} = \mathbf{1} \;...\quad (8-2)}$$

وفي الحالة هذه تكون معادلة المستقيمين المحاذيين هي:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{y} = \pm\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{x}} \;...\quad (1-8-2)$$

ملاحظات هامة:

في القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوراه منطبقان على المحورين الإحداثيين :

1) طول المحور الحقيقي $2a$

2) طول المحور التخيلي (المرافق) $2b$

3) المسافة بين البؤرتين $2c$

4) $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

5) البؤرتان والراسان دائماً على نفس المحور بينما يقع القطبان في المحور المخالف للبؤرتين.

6) $a < c$ دائماً ويمكن ان يكون $a = b$ أو $a > b$ أو $a < b$

7) الاختلاف المركزي $e = \dfrac{c}{a} > 1$

8) أنصاف الأقطار البؤرية هي كل من $PF_1\ ,\ PF_2$

مثال 25) : قطع زائد معادلته $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{36} = 1$ جد إحداثيات رأسيه وبؤرتيه وقطبيه وطول كل من محوريه والمسافة بين بؤرتيه ومقدار اختلافه المركزي ثم استخرج معادلة المستقيمين المحاذيين.

الحل:
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$$

بالمقارنة مع الصيغة القياسية $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ نستطيع ان نتوصل إلى ان :

احداثيي الراسين $a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4 \Rightarrow V_1(4,0), V_2(-4,0)$

احداثيي القطبين $b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6 \Rightarrow B_1(0,6), B_2(0,-6)$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow c = \sqrt{52} = \pm 2\sqrt{13}$$

إحداثيي البؤرتين: $F_1\left(2\sqrt{13}, 0\right), F_2\left(-2\sqrt{13}, 0\right)$

طول المحور الحقيقي : $2a = 2 \times 4 = \pm 8$ وحدة طول

طول المحور المرافق : $2b = 2 \times 6 = \pm 12$ وحدة طول

المسافة بين بؤرتيه: $2c = 2 \times 2\sqrt{13} = \pm 4\sqrt{13}$ وحدة طول

الاختلاف المركزي :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{13}}{4} = 1.8 > 1$$

معادلة المستقيمين المحاذيين: $y = \pm \frac{6}{4}\, x \Rightarrow y = \pm \frac{3}{2}\, x$

مثال 26) : قطع زائد معادلته $9y^2 - 9x^2 = 81$ جد إحداثيات رأسيه وبؤرتيه وقطبيه وطول كل من محوريه والمسافة بين بؤرتيه ومقدار اختلافه المركزي ثم استخرج معادلة المستقيمين المحاذيين.

الحل: بقسمة المعادلة على العدد 81 نحصل على المعادلة :

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 1$$

بالمقارنة مع الصيغة القياسية $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ نستطيع ان نتوصل إلى ان :

احداثيي الراسين $a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3 \Rightarrow V_1(0,3), V_2(0,-3)$

احداثيي القطبين $b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3 \Rightarrow B_1(3,0), B_2(-3,0)$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 9 = 18 \Rightarrow c = \sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$$

احداثيي البؤرتين: $F_1(0,3\sqrt{2}), F_2(0,-3\sqrt{2})$

طول المحور الحقيقي : $2a = 2 \times 3 = 6$ وحدة طول

طول المحور المرافق : $2b = 2 \times 3 = 6$ وحدة طول

المسافة بين بؤرتيه: $2c = 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ وحدة طول

الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} = 1.4 > 1$

معادلة المستقيمين المحاذيين : $y = \pm \frac{3}{3} x \Rightarrow y = \pm x$

مثال 27) : جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ورأســاه $V_1(\sqrt{10},0), V_2(-\sqrt{10},0)$ وبؤرتاه $F_1(\sqrt{18},0), F_2(-\sqrt{18},0)$.

الحل:

$$a = \sqrt{10} \Rightarrow a^2 = 10$$

$$c = \sqrt{18} \Rightarrow c^2 = 18$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 18 = 10 + b^2 \Rightarrow b^2 = 18 - 10 \Rightarrow b^2 = 8$$

بما ان البؤرتان تقعان على المحور x فان المعادلة القياسية هي

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{8} = 1$$

3-4-2 رسم القطع الزائد

لرسم القطع الزائد لابد من اتباع الخطوات الأتية :

1. نعين على المستوي الإحداثي موقع الرأسين $V_1(a,0)$، $V_2(-a,0)$ أو $V_1(0,a)$، $V_2(0,-a)$ حسب الحالة.
2. نعين على المستوي الإحداثي موقع القطبين $B_1(0,b)$، $B_2(0,-b)$ أو $B_1(b,0)$ ، $B_2(-b,0)$ حسب الحالة.
3. نرسم مستطيلاً يمر بالرأسين والقطبين أضلاعه توازي المحورين الإحداثيـــــين.
4. نرسم قطري المستطيل ممتدين خارج حدوده فيكونان هما المستقيمان المحاذين لمنحني القطع الزائد.
5. عندما تكون البؤرتان والرأسان على المحور X يرسم المنحني يميناً ويساراً وبمحـــــــاذاة قطـــري المستطيل وعندما تكون البؤرتين والرأسين على المحور Y يرسم المنحني نحو الأعلـــى والأسفـــل وبمحاذاة قطري المستطيل.
6. نعين على المستوي الإحداثي موقع البؤرتين $F_1(a,0)$، $F_2(-a,0)$ أو $F_1(0,a)$، $F_2(0,-a)$ حسب الحالة.

مثال 28) : ارسم القطع الزائد الذي معادلته :

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$$

الحل:

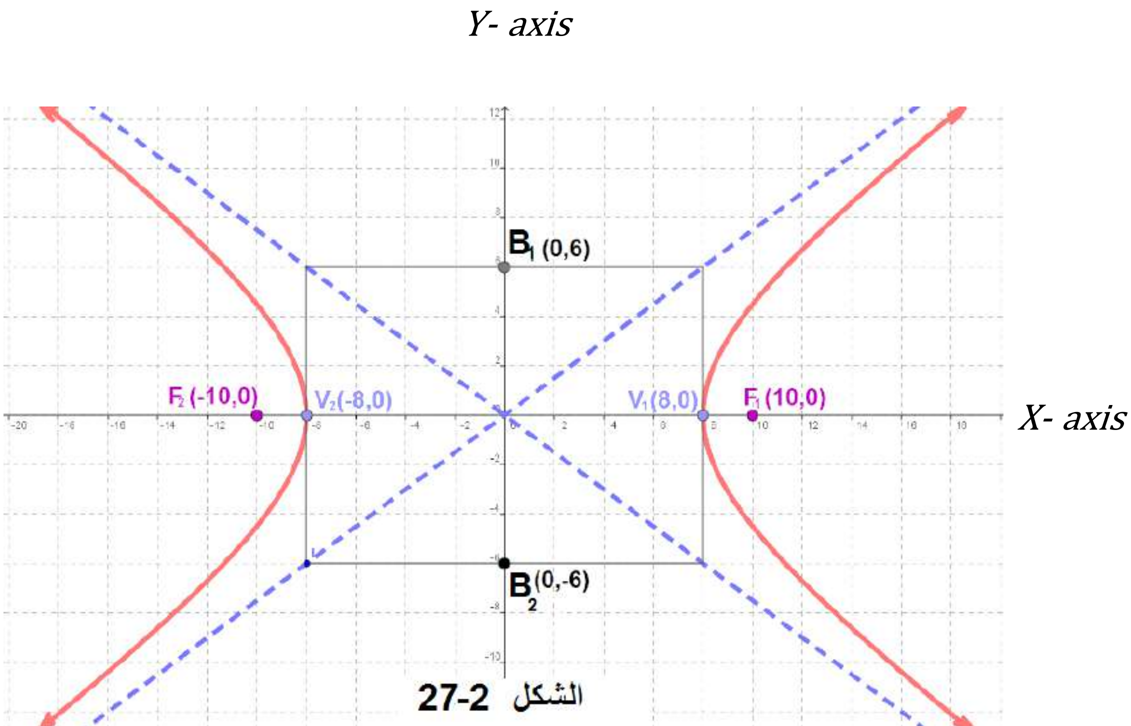
$$a^2=64\Rightarrow a=\pm 8$$

$$b^2=36\Rightarrow b=\pm 6$$

$$\because c^2=a^2+b^2$$

$$\therefore c^2=64+36=100\Rightarrow c=\pm 10$$

أي ان رأسي القطع الزائد $V_1(8{,}0),V_2(-8{,}0)$ وقطبيه $B_1(0{,}6),B_2(0,-6)$ وبؤرتيـــــه $F_1(10{,}0),F_2(-10{,}0)$ ثم نرسم مستطيلاً يمر بالرأسين والقطبين أضلاعه توازي المحوريـــن الإحداثيين ثم نرسم قطري المستطيل ممتدين خارج حدوده فيكونان هما المستقيمان المحاذيان لمنحني القطع الزائد و نرسم المنحني يميناً ويساراً وبمحاذاة قطري المستطيل ويكون شكل القطع الزائد كما فـــي الشكل 2 – 27 الاتي:



الشكل 27-2

مثال 29) : ارسم القطع الزائد الذي معادلته $9y^2 - 25x^2 = 225$

الحل : بقسمة طرفي المعادلة على (225) نحصل على :

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = \pm 5$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$$

$$\because c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 25 + 9$$

$$c^2 = 34 \Rightarrow c = \pm\sqrt{34}$$

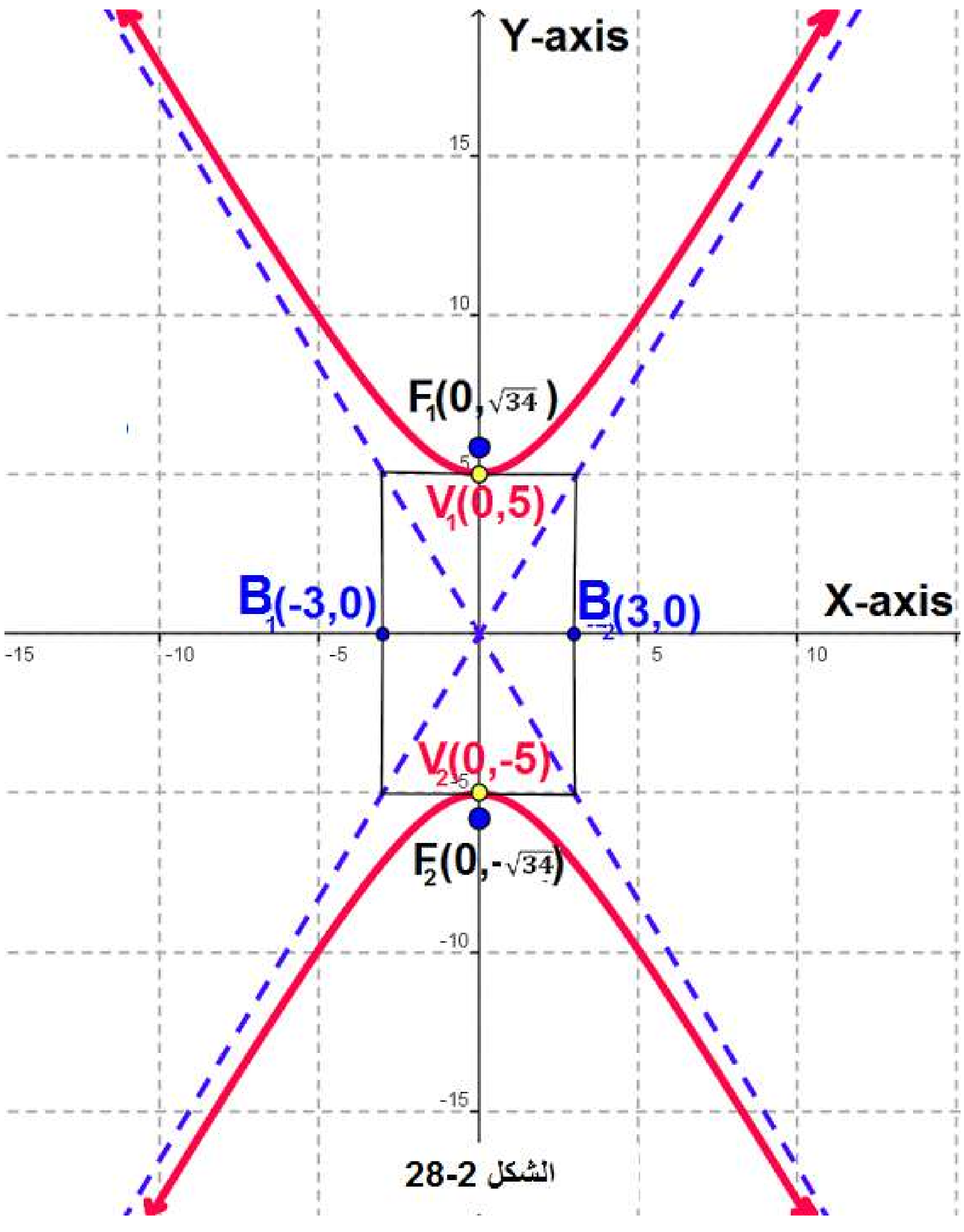
أي ان :

رأسي القطع الزائد $V_1(0,5), V_2(0,-5)$

قطبي القطع الزائد $B_1(3,0), B_2(-3,0)$

بؤرتي القطع الزائد $F_1(0,\sqrt{34}), F_2(0,-\sqrt{34})$

الأن : نرسم مستطيلاً يمر بالرأسين والقطبين أضلاعه توازي المحورين الإحداثيين ثم نرسم قطري المستطيل ممتدين خارج حدوده فيكونان هما المستقيمان المحاذيان لمنحني القطع الزائد ونرسم المنحني اعلى واسفل وبمحاذاة قطري المستطيل ويكون شكل القطع الزائد كما في الشكل 2 – 28 الاتي:



الشكل 2-28

تمرين (2-3)

1. جد الرأسين والقطبين والبؤرتين وطول كل من المحورين والمسافة بين البؤرتين ومقدار الاختلاف المركزي ثم استخرج معادلة المستقيمين المحاذيين لكل من القطوع الزائدة الأتية:

$a)\ 2x^2 - y^2 = 10$ $b)\ y^2 - 3x^2 = 12$

$c)\ 16x^2 - 25y^2 = 400$ $d)\ 7y^2 - 4x^2 = 28$

$e)\ 8x^2 - 8y^2 = 16$ $e)\ 4y^2 - 4x^2 = 1$

2. جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تنتميان إلى المحور X والمسافة بيـــن بؤرتيه تساوي 8 وحدات و طول محوره الحقيقي يساوي طول محوره المرافق .

3. جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وإحداثيي بؤرتاه $F_2(0,-10)$ ، $F_1(0,10)$ وطول محوره الحقيقي يساوي 12 وحدة.

4. لتكن $(16x^2 - Ay^2 = 225)$ معادلة قطع زائد مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 20\,x$ ، جد قيمة A.

5. جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وأحد بؤرتيه هي بؤرة قطع مكافئ معادلتـــــه $y^2 + 16x = 0$ اذا علمت ان القطع الزائد يمر بالنقطة $(6,2\sqrt{2})$.

6. النقطة $P(6,K)$ تنتمي إلى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومعادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ جد قيمة K ثم أستخرج طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة P .

7. ارسم كل من القطوع الزائدة الأتية :

$a)\ \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ $b)\ \dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

$c)\ x^2 - 9y^2 = 9$ $d)\ y^2 - 5x^2 = 25$

8. ارسم القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وإحداثيات قطبيه $B_2(0,-3)$ ، $B_1(0,3)$ والبعد بين بؤرتيه يساوي 10 وحدات واستخرج معادلة كل من المستقيمين المحاذيين لمنحني القطع.

الفصل الثالث

تطبيقات على المشتقة Applications on the derivative

الأهداف السلوكية:

ينبغي للطالب في نهاية هذا الفصل ان يكون قادراً على ان:

1. يستذكر المعلومات التي تعلمها الطالب في الصف الثاني فيما يخص المشتقة.
2. يتمكن من استخدام مفهوم المشتقة في إيجاد القيم التقريبية للجذور والدوال ومساحات وحجوم الأشكال الهندسية المستوية والمجسمة .
3. يتعرف على مفهوم النقاط الحرجة للدالة ومناطق تزايدها وتناقصها ويتمكن من تحديد نوع النقطة الحرجة باستخدام أسلوب فحص إشارة المشتقة على خط الأعداد.
4. يتعرف على مفهوم نقطة الانقلاب للدالة ومفهوم تقعر وتحدب منحنيها باستخـــــــدام أسلوب فحص إشارة المشتقة الثانية على خط الأعداد.
5. يتعرف على الخطوات اللازم إتباعها لرسم بيان الدوال كثيرات الحدود ويتمكن من إظهار الرسم على الورق البياني باستخدام المعلومات التي حصل عليها من الخطوات آنفة الذكر.
6. يتمكن من استخدام ما تعلمه في موضوع النهايات في حل المسائل العملية المتعلقة بها.

المحتوى العلمي

1-3	مراجعه قواعد إيجاد المشتقة
2-3	استخدام المشتقة في التقريب
3-3	النقاط الحرجة للدالة ومناطق التزايد والتناقص
4-3	النهايات العظمى والصغرى المحلية (النسبية)
5-3	نقاط الانقلاب ومناطق تحدب وتقعر الدالة
6-3	رسم الدوال الحقيقية
7-3	تطبيقات عملية على النهايات العظمى والصغرى

الفصل الثالث

تطبيقات على المشتقة Applications on the derivative

1-3 مراجعة عامة في قواعد إيجاد المشتقة.

سبق للطالب أن تعلم متى تكون الدالة قابلة للاشتقاق وتعرف أيضاً على قواعد أيجاد المشتقة وهي :

لتكن $g(x)$ ، $f(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق

1) $\frac{d}{dx}[c]=0$, c: كمية ثابتة

2) $\frac{d}{dx}[c.f(x)]=c.\frac{d}{dx}[f(x)]$, c: كمية ثابتة

3) $\frac{d}{dx}[x^n]=nx^{n-1}$

4) $\frac{d}{dx}[f(x)\pm g(x)]=\frac{d}{dx}[f(x)]\pm\frac{d}{dx}[g(x)]$

5) $\frac{d}{dx}[f(x)\times g(x)]=f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]+g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$

6) $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]-f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}\ ;g(x)\neq 0$

7) $\frac{d}{dx}(u)^n=n.(u)^{n-1}\frac{du}{dx}$

2-3 استخدام المشتقة في التقريب: Using the derivatives in approximation

لتكن $y=f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق ولنفرض أن x هو عدد ينتمي إلى مجال الدالة $f(x)$ كما نفرض أن Δx وتقرأ (دلتا x) هو تغير طفيف في قيمة المتغير x وليكن

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

وهو التغير المقابل في قيمة الدالة. ينص مبدأ التغير التقريبي على أن: $\Delta y=f'(x).\Delta x$ وان القيمة التقريبية للدالة y عندما تتغير x بمقدار Δx تساوي:

$$f(x+\Delta x)=y+\Delta y$$

ولإيجاد هذه القيمة التقريبية علينا أتباع الخطوات الاتية :

1- نفرض الدالة y لها صورة المقدار المعطى في السؤال.

2- نفرض قيمة لـ x ويكون قريب من العدد الموجود بحيث يمكن استخراجه من الجذر أو عده بشكـــل بسيط.

3- نجد قيم y وكذلك y' بدلالة قيمة x المفروضة.

4- نجد قيمة Δx = القيمة الأصلية – القيمة المفروضة.

5- نجد Δy حيث $\Delta y=f'(x).\Delta x$ ويمثل التغير التقريبي.

6- نطبق قانون $f(x+\Delta x)=y+\Delta y$ لإيجاد القيمة التقريبية المطلوبة.

مثال 1) : جد باستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية ما يلي: -

$a)\sqrt{51}$ $\qquad$ $b)(8.35)^{\frac{2}{3}}$

الحل :

$a)\sqrt{51}$

نفرض : $y = \sqrt{x}$

نفرض قيمة لـ x $\qquad$ $let\ x = 49$

$\Delta x =$ القيمة الأصلية $-$ القيمة المفروضة

$\Delta x = 51 - 49 = 2$

بتعويض قيمة x المفروضة $\qquad$ $y = \sqrt{49} = 7$

نستخرج مشتقة الدالة $\qquad$ $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

بتعويض قيمة x $\qquad$ $= \frac{1}{2\times\sqrt{49}} = \frac{1}{2\times 7} = \frac{1}{14} = 0.071$

$f'(x) = y'$

$\because \Delta y = f'(x).\Delta x$

قيمة التغير التقريبي $\qquad$ $\therefore \Delta y = 0.071 \times 2 = 0.142$

$\sqrt{51} = f\ (x + \Delta x) = y + \Delta y$

القيمة التقريبية $\qquad$ $= 7 + 0.142 = 7.142$

$b)(8.35)^{\frac{2}{3}}$

الحل: نفرض : $y = f\ (x) = x^{\frac{2}{3}}$

نفرض قيمة x ولتكن $x = 8$ ، $\Delta x = 8.35 - 8 = 0.35$

$$\therefore\ f\ (x) = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

بتعويض قيمة $x = 8$ في المشتقة نحصل على :

$$f'(8) = \frac{2}{3\sqrt[3]{8}} = \frac{2}{3\times 2} = \frac{1}{3} = 0.333$$

$$\Delta y = f'(x).\Delta x = 0.333 \times 0.35 = 0.11655$$

$$\therefore (8.35)^{\frac{2}{3}} = f\ (x + \Delta x) = 4 + 0.11655 = 4.116$$

مثال 2) : مكعب طول ضلعه $3.98cm$ جد حجمه بصورة تقريبية ؟

الحل : نفرض حجم المكعب y ، ونفرض طول الضلع $x\ cm$

حجم المكعب = مكعب طول الضلع

$\therefore y = x^3$

$Let \quad x = 4 \quad , \Delta x = 3.98 - 4 = -0.02$

بتعويض قيمة x المفروضة $\therefore y =$

$(4)^3 = 64$

$\because y = x^3$

$\therefore y' = 3x^2$

بتعويض قيمة x نحصل على :

$y'(4) = 3 \times (4)^2 = 3 \times 16 = 48$

$\Delta y = y' . \Delta x = 48 \times (-0.02) = -0.96$

$f(x + \Delta x) = y + \Delta y$

حجم المكعب بصورة تقريبية $= 64 + (-0.96) = 63.04 \ cm^3$

مثال 3) :حديقة دائرية مساحتها m^2 (35π) فماطول نصف قطرها بصورة تقريبية ؟

الحل : نفرض مساحة الدائرة A ونفرض نصف قطرها r

مساحة الدائرة = مربع نصف القطر × النسبة الثابتة

$\because A = \pi r^2$

بتعويض قيمة المساحة $\therefore 35\pi = \pi r^2$

بقسمة طرفي المعادلة على π $\therefore r^2 = 35$

بجذر طرفي المعادلة $\therefore r = \sqrt{35}$

$let\ y = \sqrt{x} , x = 36 , \Delta x = 35 - 36 = -1$

$\therefore y = f(x) = \sqrt{36} = 6$

$y = \sqrt{x} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore y'(36) = \frac{1}{2\sqrt{36}}$$

$$y'(36) = \frac{1}{2 \times 6}$$

$$y'(36) = \frac{1}{12}$$

$$\therefore y'(36) = 0.083$$

$$\Delta y = y'.\Delta x$$

$\Delta y = 0.083 \times (-1) = -0.083$ الخطأ التقريبي

$f(x + \Delta x) = y + \Delta y = 6 + (-0.083) = 5.917\ m$

القيمة التقريبية لطول نصف قطر الحديقة

ملاحظة: Δy تمثل مقدار التغير أو الخطأ التقريبي.

مثال 4) : غطيت كرة مصنوعة من الحديد الصلب قطرها $6\ cm$ بطبقة من السيراميك بسمك $0.2\ cm$ ما حجم السيراميك اللازم بصورة تقريبية ؟

الحل : نفرض حجم الكرة y ، ونفرض نصف قطر الكرة x

حجم الكرة = $\frac{4}{3}$ × مكعب نصف القطر × النسبة الثابتة

$$\therefore y = \frac{4\pi}{3}x^3$$

$$x = \frac{\text{القطر}}{2} = \frac{6}{2} = 3cm$$

$\Delta x = 0.2$ معطى في السؤال

$f'(x) = 4\pi x^2$ بإيجاد المشتقة للدالة

$\therefore f'(3) = 4\pi \times (3)^2 = 36\pi$ بتعويض قيمة x وتربيعها

$$\Delta y = y'.\Delta x = 36\pi \times 0.2 = 7.2\pi$$

$\therefore \Delta y = 7.2\pi\ cm^3$ حجم السيراميك

مثال 5) : اذا كانت $f\ (x) = x^3 + x^2 - 3x + 4$. جد باستخدام التفاضلات قيمة تقريبية للمقدار (2.003) .

الحل :

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 4$$

$$let\ x = 2 \Rightarrow \Delta x = 2.003 - 2 = 0.003$$

$$f\ (x) = y = x^3 + x^2 - 3x + 4$$

بتعويض قيمة x في الدالة نحصل على :

$$y(2) = (2)^3 + (2)^2 - 3(2) + 4 = 10$$

باشتقاق الدالة $y' = 3x^2 + 2x - 3$

بتعويض قيمة $x = 2$ $\therefore y'(2) = 3(2)^2 + 2(2) - 3$

$$y'(2) = 12 + 4 - 3 = 13$$

$$\Delta y = y'.\Delta x$$

التغير التقريبي $\Delta y = 13 \times 0.003 = 0.039$

القيمة التقريبية $\therefore f(x + \Delta x) = y + \Delta y = 10 + 0.039 = 10.039$

تمرين (1-3)

1. إذا كان $f\ (x) = x^5 + 3x^{\frac{1}{3}} + 2$ فجد بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات $f(1.01)$
2. إذا كان $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$ فجد بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات $f(3.02)$
3. جد باستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية قيمة كل من :

$a)\ \sqrt[3]{26} + \sqrt{26}$ $\quad b)\ \sqrt[4]{\frac{17}{81}}$ $\quad$ c) $(25)^{\frac{1}{3}}$ $\quad d)\ \sqrt{36.6}$ $\quad e)\ (33)^{-\frac{1}{5}}$

4. في أحدى الورش صُنعت كرة مجوفة من الحديد بقطر $18\ cm$ فإذا كان سمك الحديد المستخدم $0.1\ cm$ فجد بصورة تقريبية وباستخدام التفاضلات حجم الحديد وحجم الكرة ؟
5. مكعب حجمه $26cm^3$ جد بصورة تقريبية وباستخدام التفاضلات طول ضلع المكعب ؟
6. صنعت حلقة دائرية مجوفة من الصفيح وقيس نصف قطرها فوجد من الخارج انه $10.05\ cm$ ونصف قطرها من الداخل $10\ cm$ جد بصورة تقريبية وباستخدام التفاضلات مساحة الحلقة الدائرية.

3-3 النقاط الحرجة للدالة ومناطق التزايد والتناقص:

لمعرفة معنى التزايد والتناقص للدالة في مجالها أو في مجموعة جزئية منه لنتأمل في المثال التالي :

مثال 6) : جد مناطق التزايد والتناقص للدالة $f(x) \ = \ x^2 - 4x + 3$

الحل: أولا- نجد مشتقة الدالة فيكون $f'(x) = 2x - 4$

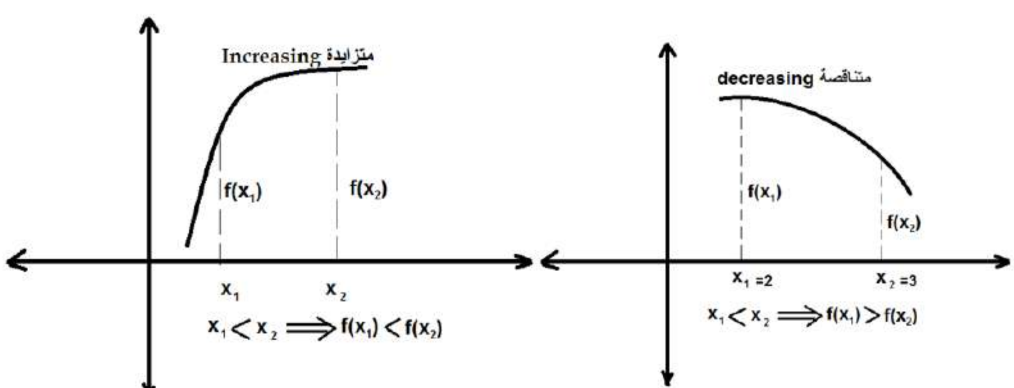
وكما مر سابقاً أن هذه المشتقة تمثل ميل المماس في أي نقطة x ومن المعلوم أيضاً أن ميل المماس يمثل ظل الزاوية أي $m = tan\,\theta$

ثانياً- نجعل مشتقة الدالة مساوية إلى الصفر أي

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \ \Rightarrow x = 2$$

وهذا يعني ان مماس المنحني عندما $x = 2$ يكون موازياً لمحور السينات وأن جميع المماسات التي ترسم للمنحني عندما $x > 2$ تكون زوايا ميلها (التي تصنعها مع الجزء الموجب من المحور السيني) حادة وبذلك يكون ميلها موجباً ، لاحظ الشكل $3 - 1$ ادناه وفي هذا الجزء من مجال الدالة نلاحظ أن قيمة الدالة تكبر أو تزداد تبعاً لازدياد قيمة x فتكون الدالة في هذا الجزء من مجالها متزايدة.

أما المماسات التي ترسم للمنحني عندما $x < 2$ فتكون زوايا ميلها جميعاً منفرجة وبذلك يكون ميلها سالباً، وفي هذا الجزء من مجال الدالة نلاحظ أن قيمة الدالة تصغر أي تتناقص لازدياد قيمة x فتكون الدالة في هذا الجزء من مجالها متناقصة ، لاحظ الشكل $3 - 2$ ادناه:



الشكل 1-3   الشكل 2-3

ويمكن رسم خط الأعداد وتعين عليه إشارة مشتقة الدالة $f'(x)$ حيث نعين قيمة x المستخرجة من المشتقة ثم نأخذ قيمة $x > 2$ فيكون $f'(x) > 0$ وعندها تكون الدالة متزايدة. وعندما نأخذ قيمة $x < 2$ تكون قيمة $f'(x) < 0$ وعندها تكون الدالة متناقصة أما النقطة التي فيهـا $f'(x) = 0$ فتمثل (في هذه الحالة) نهاية صغرى محلية والتي سيأتي ذكرها بالتفصيل لاحقاً.

أما إذا لم تتغير إشارة مشتقة الدالة مهما أخذت قيم أكبر أو أصغر عن قيمة x المستخرجة فعندها تكون النقطة حرجة فقط وسيأتي ذكرها لاحقاً.

بالرجوع للشكلين والبحث السابق يمكن أن نستنتج اختبار التزايد والتناقص للدالة باستخدام المشتقة الأولى.

تعريف : لتكن $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b) فان: $1)\ f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ متزايدة $\forall x \in (\mathrm{a},\mathrm{b})$ $2)\ f'(x)) < 0 \Rightarrow \quad f(x)$ متناقصة $\forall\, x \in (\mathrm{a},\mathrm{b})$

مثال (7) : جد مناطق التزايد والتناقص للدوال التالية ؟

$$a)\ f(x) = x^2 - 4x + 6 \quad , \quad b)\ f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$$

الحل $a)$:

$a)\ f(x) = x^2 - 4x + 6$

بايجاد مشتقة الدالة $f'(x) = 2x - 4$

نجعل المشتقة تساوي صفر $f'(x) = 0$

$\therefore 2x - 4 = 0 \ (\div 2)$

$x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

أشارة $f'(x)$ - - - - - - 2 + + + +

$f'(x) > 0 \qquad \forall x > 2$

مناطق التزايد $\therefore \{x : x > 2,\ x \in \mathbb{R}\}$

$f'(x) < 0 \quad \forall x < 2$

مناطق التناقص $\{x : x < 2,\ x \in \mathbb{R}\}$

$b)\ f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$

بإيجاد المشتقة للدالة $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

نجعل المشتقة = صفر $f'(x) = 0$

$\therefore 6x^2 - 6x - 12 = 0 \qquad (\div 6)$

$x^2 - x - 2 = 0$

$$(x-2)(x+1) \ = \ 0$$
$$x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$$
$$x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1$$

نختبر على خط الأعداد إشارة المشتقة الأولى بالتعويض بقيم مجاورة للعددين $x=2$ و $x=-1$ في المشتقة الأولى

اشارة $f'(x)$ $\quad + + + \ (-1) \text{ - - - - } (2) \ + + +$

مناطق التزايد $\{ \ x: -1 \ > x \ > 2, \quad x \in \ R \}$

مناطق التناقص $\{ \ x: -1 \ < x \ < 2, \ x \in \ R \}$

ملاحظة : يمكن كتابة مناطق التزايد والتناقص بصيغة أخرى كالاتي:

مناطق التزايد : $\{x: x < -1\} \cup \{x: x > 2\}$ او $\mathbb{R} \, / \, (-1,2)$

مناطق التناقص: الفترة المفتوحة $(-1,2)$

مثال 8) : أثبت أن الدالة $f(x) \ = \ 7x-3$ متزايدة في $\mathbb{R}$

الحل : نجد المشتقة الأولى للدالة أي $f'(x) = 7$ نلاحظ ان

$$\therefore f'(x) > 0$$

أي ان الدالة متزايدة في $\mathbb{R}$

4-3 النهايات العظمى والصغرى المحلية (النسبية):

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة المغلقة I وقابلة للاشتقاق عند $x=c$ التي تنتمي إلى الفترة المفتوحة I فإذا :

1. تغيرت إشارة $f'(x)$ من الموجب إلى السالب حول c فالنقطة $(c, f(c))$ تمثل نقطة نهاية عظمى محلية ويسمى العدد $f(c)$ بالقيمة العظمى للدالة $f(x)$ في الفترة I .
2. تغيرت إشارة $f'(x)$ من السالب إلى الموجب حول c فالنقطة $(c, f(c))$ تمثل نقطة نهاية صغرى محلية ويسمى العدد $f(c)$ بالقيمة الصغرى للدالة $f(x)$ في الفترة I .
3. أما إذا لم تتغير إشارة $f'(x)$ مهما ازدادت أو نقصت قيمة x حول c فالنقطة $(c, f(c))$ لا تمثل نهاية صغرى أو عظمى محلية ولكنها حرجة فقط .

ولإيجاد نقاط النهايات العظمى والصغرى للدالة واختبارها بواسطة المشتقة الأولى وإيجاد مناطق التزايد والتناقص نتبع الخطوات الأتية:

1. نجد المشتقة الأولى للدالة.
2. نجعل هذه المشتقة تساوي صفر ثم نجد الجذور الحقيقية للمعادلة الناتجة.
3. نمثل قيم x المستخرجة على خط الأعداد ثم نختبر إشارة الفترات وذلك بأخذ قيمـــة لـ x تكون مرة أكبر ومرة أصغر من قيمة x المستخرجة (هذه القيمة نختارها حسب أرادتنـــا) ونعوضها في المشتقة الأولى فإذا كانت القيمة موجبة أشرنا بسهم صاعد على خط الأعداد وإذا كانت سالبة أشرنا بسهم نازل.
4. إذا كانت الاشارة قبل قيمة x موجبـــة أي $f'(x) > 0$ وبعدها سالبة أي $f'(x) < 0$ فهذا يعني أن النقطة تمثل نهاية عظمى محلية ، وإذا كان العكس كانت النهايـــة صغرى محلية. أما إذا لم تتغير إشارة $f'(x)$ فالنقطة لا تمثل نهاية صغرى أوعظمى وأنما حرجة فقط (كما مر ذكره آنفاً) وهي تفيدنا في رسم الدالة.
5. نعوض قيمة x والتي تمثل الجذور الحقيقية في المعادلة الأصلية لاستخراج قيمة y لكتابــة النهايات كأزواج مرتبة ثم نكتب مناطق التزايد والتناقص للدالة.

كما في الأمثلة الأتية:

مثال 9) :جد النهايات العظمى والصغرى المحلية ومناطق التزايد والتناقص للدالة:

$a)\ f(x) = 16 - 6x - 3x^2$

$b)\ f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x - 12$

الحل :

$a)\ f(x) = 16 - 6x - 3x^2$

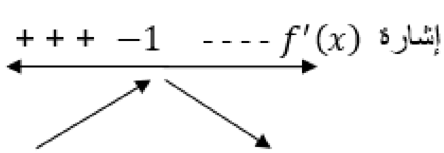
نجد المشتقة الأولى $\quad f'(x) = -6 - 6x$

نجعل المشتقة = صفر $\quad f'(x) = 0$

$\therefore\ -6 - 6x = 0 \quad \div (-6)$

$1 + x = 0 \Rightarrow \quad x = -1$

الأن نختبر قيمة x على خط الأعداد



نستخرج قيمة y عندما $x = -1$ بتعويض قيمة x في الدالة كالاتي:

$$y = f(-1) = 16 - 6(-1) - 3(-1)^2$$

$y = 16 + 6 - 3$

$\therefore y = 19$ بأجراء عملية تبسيط

$\therefore$ النقطة $(-1{,}19)$ تمثل نهاية عظمى محلية

مناطق التزايد $\{x: x < -1, \quad x \in \mathbb{R}\}$

مناطق التناقص $\{x: x > -1, \ x \in \mathbb{R}\}$

$b)\ f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x - 12$

الحل: نستخرج المشتقة الأولى للدالة $f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$

نجعل المشتقة = صفر $f'(x) = 0$

$6x^2 - 18x - 24 = 0 \qquad \div 6$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0$

$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

نمثل قيم x المستخرجة على خط الاعداد ونأخذ من كل فترة قيمة نختارها ونعوضها في المشتقة لمعرفة أشارتها فقط .

إشارة $f'(x)$ + + + + + -1 - - - - - - 4 + + + + + + +

نختار $x = -2$ نعوضها في المشتقة

$\therefore f'(-2) = 6(-2)^2 - 18(-2) - 24 = +36$

نختار $x = 0$ نعوضها في المشتقة $f'(0) = 6(0)^2 - 18(0) - 24 = -24$

نختار $x = 5$ نعوضها في المشتقة $f'(5) = 6(5)^2 - 18(5) - 24 = +36$

نعوض قيمة $x = -1$ في الدالة الأصلية لاستخراج قيمة y

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x - 12$

$\therefore \ y = 2(-1)^3 - 9(-1)^2 - 24(-1) - 12$

$= -2 - 9 + 24 - 12 = 1$

$\therefore$النقطة $(-1{,}1)$ تمثل نهاية عظمى محلية (لاحظ خط الاعداد)

الأن نعوض قيمة $x = 4$ في الدالة الأصلية لاستخراج قيمة y الثانية

$$\therefore\ y = 2(4)^3 - 9(4)^2 - 24(4) - 12 \ = \ -124$$

$\therefore$ النقطة $(4, -124)$ تمثل نهاية صغرى محلية (كما يتضح من خط الاعداد)

$\therefore$ مناطق التزايد $\{x :\ x < -1, x \in \mathbb{R}\} \cup \{x : x > 4, x \in \mathbb{R}\}$

مناطق التناقص $\{x :\ -1 < x < 4,\ x \in \mathbb{R}\}$

مثال 10) : جد النقاط على المنحني $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$ والتـــي يكون فيها المماس موازياً لمحور السينات.

الحل : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$

بإيجاد مشتقة الدالة $f'(x) = \ 6x^2 - 6x - 12$

يكون المماس موازياً لمحور السينات عندما يكون ميل المماس يساوي صفراً أي ان مشتقة الدالة تساوي صفراً لأن مشتقة الدالة هي ميل المماس عند تلك النقطة.

$$\therefore\ f'(x) = 0$$

$$6x^2 - 6x - 12 = 0] \ \div 6$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

أما $x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

أو $x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

نعوض قيمة $x = 2$ في الدالة الأصلية

$$\therefore\ y = f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 2$$

$$y = 2 \times 8 - 3 \times 4 - 24 + 2 = 16 - 12 - 22 = -18$$

$\therefore$ النقطة الأولى $P_1(2, -18)$

الأن نعوض قيمة $x = -1$ في الدالة الأصلية

$$y = f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 2 = 9$$

$\therefore$ النقطة الثانية $P_2\ (-1, 9)$

$\therefore$ النقاط التي يكون فيها المماس موازي لمحور السينات هما النقطتين الاتيتين :

$P_1(2, -18), P_2\ (-1,9)$

5-3 نقاط الانقلاب ومناطق تحدب وتقعر الدالة.

تعريف : تقعر وتحدب المنحنيات :

لتكن f دالة معرفة في الفترة المغلقة $[a,b]: a,b \in \mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق مشتقه أولى وثانية على الفترة المفتوحة $(a,b): a,b \in \mathbb{R}$:

1-تكون الدالة مقعرة على الفترة المفتوحة I إذا كانت $f''(x) > 0 , \forall x \in (a,b)$

2-تكون الدالة محدبة على الفترة المفتوحة I إذا كانت $f''(x) < 0, \forall x \in (a,b)$

مثال (11) : حدد شكل منحنى الدالة (محدب ، مقعر) لكل مما يأتي :

$$a)\ f(x) = x^2 \quad , \quad b)\ \ f(x) = 2x - 3x^2$$

الحل :

$a) f(x) = x^2$

نجد المشتقة الأولى $f'(x) = 2x$

نجد المشتقة الثانية $f''(x) = 2$

$$\because\ f''(x) > 0\ ,\ x \in R$$

أي ان الدالة مقعرة عند جميع القيم الحقيقية.

$b)\ f(x) = 2x - 3x^2$

نجد المشتقة الأولى $f'(x) = 2 - 6x$

نجد المشتقة الثانية $f''(x) = -6$

$$\because\ f''(x) < 0\ ,\ \ \forall x\ \in R$$

أي ان الدالة محدبة عند جميع القيم الحقيقية.

نقاط الانقلاب Points of inflection

يقال أن النقطة $(c, f(c))$ نقطة انقلاب على منحني الدالة f إذا كان له مماس في هذه النقطة ووجدت فترة مفتوحة I تحوي القيمة $c \in$ I والتي يكون عندها $f''(c) = 0$ بحيث تتغير إشارة $f''(x)$ مــن موجب إلى سالب حول c أو بالعكس.

ولإيجاد نقاط الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب للدالة نتبع الخطوات التالية :

1-نجد المشتقة الثانية للدالة.

2-نجعل المشتقة الثانية مساوية إلى الصفر ثم نجد الجذور الحقيقية للمعادلة الناتجة ولنفرض أن أحد الجذور $x = c$

3-نأخذ قيمة قريبة من c أي أصغر منها قليلاً ثم أكبر منها قليلاً ونعوضها في المشتقة الثانية فـــإذا تغيرت إشارة المشتقة الثانية من سالبة إلى موجبة أو بالعكس فالنقطة تمثل نقطة انقلاب كما في الأمثلة الأتية :

مثال 12) : جد نقاط الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب للدالة

$$f(x) = 4x^3 - 3x + 4$$

الحل :

$$f'(x) = 12x^2 - 3 \;\Rightarrow f''(x) = 24x$$

$$24x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$$

$f''(x)$ إشارة - - - - 0 ++++

∩ ∪

نعوض $x = 0$ في الدالة الاصلية لاستخراج قيمة y

$$y = f(0) = 4(0)^3 - 3(0) + 4 = 4$$

اي ان النقطة $(0,4)$ تمثل نقطة أنقلاب للدالة

مناطق التحدب: $\{x : x < 0,\ x \in \mathbb{R}\}$

مناطق التقعر: $\{x : x > 0 ,\ x \in \mathbb{R}\}$

مثال 13) : جد النهايات العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص ونقاط الانقلاب ومناطق التحدب والتقعر للدالة:

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$$

الحل : نجد المشتقة الأولى

$$f'(x) = 6x^2 - 12x + 6$$

نجعل المشتقة = صفر $\quad 6x^2 - 12x + 6 = 0$

بقسمة طرفي المعادلة على 6 $\quad x^2 - 2x + 1 = 0$

$$(x-1)^2 = 0$$

بجذر طرفي المعادلة $\quad x - 1 = 0 \;\Rightarrow x = 1$

$f'(x)$ إشارة +++++ 1 ++++

∴ لا توجد للدالة نهاية عظمى أو صغرى محلية

نعوض $x = 1$ فينتج $\quad \therefore y = f(1) = 2(1)^3 - 6(1)^2 + 6(1) + 5$

$$y = 2 - 6 + 6 + 5 = 7$$

$\therefore$ النقطة $(1,7)$ حرجة فقط والدالة متزايدة في مجالها

$f'(x) = 6x^2 - 12x + 6$

نجد المشتقة الثانية $f''(x) = 12x - 12$

نجعل المشتقة الثانية = صفر $12x - 12 = 0$

بقسمة طرفي المعادلة على12 $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

الان نفحص إشارة المشتقة الثانية على خط الأعداد

إشارة $f''(x)$ - - - - - - - - 1 ++++++++

$\cap$ $\cup$

مناطق التحدب : $\{x : x < 1,\ x \in \mathbb{R}\}$

مناطق التقعر : $\{x :\ x > 1,\ x \in \mathbb{R}\}$

تمرين (2-3)

جد النهايات العظمى والصغرى المحلية ومناطق التزايد والتناقص للدوال التالية ونقاط الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب أن وجدت؟

1) $f(x) = 5 - 2x + x^2$

2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

3) $f(x) = x(x-2)$

4) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 6x$

5) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$

6) $f(x) = 1 - (3-x)^2$

7) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

8) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

9) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

10) $f(x) = 4 + 3x - x^2$

3-6 رسم الدوال الحقيقية graphing real valued Functions

سبق أن درسنا بعض خواص رسم الدوال مثل التناظر والاستمرارية والمشتقتين الأولى والثانية التي تزودنا بخواص أخرى أكثر فائدة في رسم الدوال فمنها نجد فترات التزايد والتناقص للدالة وفترات التقعر والتحدب ونقاط النهايات العظمى والصغرى ونقاط الانقلاب وكذلك المحاذيات التي تفيدنا كثيراً في رسم الدوال النسبية.

فإذا تمكنا من إيجاد هذه المعلومات نستطيع بسهولة رسم الدالة وبشكل دقيق.ولأجل تسهيل عمـــل الطالب نلخص الخطوات الأساسية اللازمة للحصول على المعلومات المطلوبة. وكما يلي : -

1. تعيين أوسع مجال للدالة.
2. تعيين تناظر الدالة بالنسبة للمحور Y ونقطة الأصل.
3. تعيين نقاط التقاطع مع محور Y والمحور X (إن أمكن)
4. تعيين نقاط النهايات العظمى والصغرى المحلية ومناطق التزايد والتناقص.
5. تعيين نقاط الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب (أن أمكن)
6. في حالة كون عدد النقاط المستخرجة قليلة ولأجل الدقة يمكن إيجاد إحداثيات نقاط أخرى يمر بها مخطط الدالة.

وأخيرا نوصي طلبتنا الأعزاء بالقيام برسم المخططات البيانية لعدد من الدوال كي يتمكنوا من اكتساب القابلية والمهارة في هذا المجال وسوف نعطي نبذة مختصرة عن كل ما ورد للتذكير.

1. أوسع مجال للدالة: - بما ان مستوى الرسم هو مستوى حقيقي فأن النقاط التي ستمثل عليه يجب أن تكون حقيقية فقط أي النقاط التي يكون كل من إحداثيها عدداً حقيقياً فإذا كان هناك قيماً لأحد المتغيرين تجعل القيمة المقابلة للمتغير الآخر خيالية أو غير محددة (كما في الجذور الخيالية أو قيم المالانهاية) فأننا لا يمكننا وضع هذه النقط على المستوى الحقيقي لذلك فإن تلك القيم تكون خارج مجال الدالة.
2. التناظر:

a) تكون الدالة متناظرة مع المحور Y إذا تحقق الشرط التالي:

$$f(-x) = f(x)$$

b)تكون الدالة متناظرة مع نقطة الأصل إذا تحقق الشرط التالي:

$$f(-x) = -f(x)$$

وبشكل عام إذا كانت جميع أسس المتغير(x) بالدالة فردية فأنها متناظرة مع نقطة الأصل وإذا كانت جميع الاسس زوجية فأن الدالة متناظرة مع المحور Y وإذا كانت الدالة تحوي أسسا فردية وزوجية للمتغير (x) فليس هناك أي تناظر لا مع نقطة الأصل ولا مع المحور Y.

3. التقاطع مع المحورين الإحداثيين:

لإيجاد نقاط التقاطع مع المحور Y نعوض $x = 0$ ونحل المعادلة الناتجة في y لأن جميع النقاط التي تقع على المحور Y يكون فيها $x = 0$ ، وبنفس الطريقة لإيجاد نقاط التقاطع مع المحور X نعوض عن $y = 0$ ونحل المعادلة الناتجة في x . ثم نعمل جدول وتوضع النقاط في الجدول

فمثلاً : لإيجاد نقاط تقاطع الدالة $y = x^2 - 4$ مع المحورين الإحداثيين :

$$let\ \ x = 0 \quad \Rightarrow y = -4$$

$\therefore$ نقطة تقاطع الدالة مع المحورY هي $(0,-4)$

$$\text{let}\, y = 0 \ \Rightarrow \ x^2 - 4 = 0$$

$$\therefore (x-2)(x+2) = 0$$

$$x - 2 = 0 \ \Rightarrow x = 2$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$\therefore$ نقاط تقاطع الدالة مع المحور X $(2,0), (-2,0)$

x	y	(x,y)
0	-4	$(0,-4)$
2	0	$(2,0)$
-2	0	$(-2,0)$

4. إيجاد نقاط النهايات العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص للدالة :(وقد مر ذكرهـــا مفصلا سابقا)
5. إيجاد نقاط الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب :(وقد مر أيضا ذكرها مفصلا سابقا)
6. إيجاد نقاط أخرى ولأجل الدقة يمكن إيجاد نقاط أخرى خصوصاً في بعض الدوال الكسرية (التي لا مجال لذكرها) وفي بعض الدوال المتعددة الحدود وذلك بأخذ قيم لـلمتغير x نختارها ونعوضها في الدالة لإيجاد قيم y لزيادة نقاط الدالة التي يمر بها المخطط.
7. نعين النقاط المستخرجة في الجدول على ورق بياني ثم نصل بين النقاط لاستخراج شكل الدالة

مثال (14):باستخدام معلوماتك في التفاضل أرسم منحنيات كل من الدوال التالية ؟

$$a) y = x^2 - 4 \qquad\qquad b)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

الحل :

$a)\ \ y = x^2 - 4$

1. أوسع مجال للدالة: يكون أوسع مجال هو جميع الأعداد الحقيقية ($\mathbb{R}$) لأنها دالة متعددة حدود.
2. التناظر: a) مع المحورY $\qquad f(x) = x^2 - 4$

$$f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = \ f(x)$$

إذاً الدالة متناظرة مع المحور Y

b) التناظر مع نقطة الأصل $\qquad -f(x) = -(x^2 - 4)$

$$-f(x) = \ -x^2 + 4 \ \neq f(-x)$$

أي ان الدالة غير متناظرة مع نقطة الأصل

3. التقاطع مع المحورين :

$$f(x) = y = x^2 - 4$$

$$let\ x = 0 \ \Rightarrow \ y = -4$$

$\therefore$ نقطة تقاطع المنحني مع المحور Y $\quad (0, -4)$

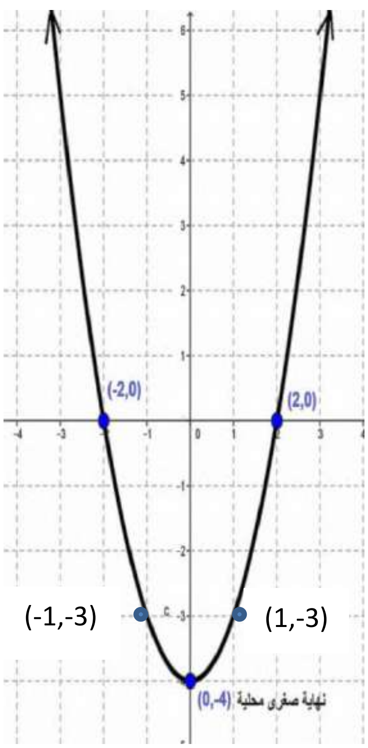
$$let\ \ y = 0 \ \Rightarrow \ x^2 - 4 = 0$$

$$(x-2)(x+2) = 0$$

$$x - 2 = 0 \ \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2{,}0)$$

$$x + 2 = 0 \ \Rightarrow x = -2 \Rightarrow (-2{,}0)$$

اي ان نقاط التقاطع مع المحور x هي$(-2{,}0)$ $(2{,}0)$



4. إيجاد نقاط النهايات العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص للدالة:

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$f'(x) = 2x$$

نجعل المشتقة = صفر $\quad 2x = 0 \ \Rightarrow \ x = 0$

- - - -   0   + + + +

بالتعويض في الدالة الأصلية $\quad \therefore\ y = (0)^2 - 4 = -4$

النقطة $(0, -4)$ تمثل نهاية صغرى محلية

مناطق التناقص $\quad \{x: x < 0, x \in R\}$

مناطق التزايد $\quad \{x: x > 0, x \in R\}$

5. إيجاد نقاط الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2$$

أي انه ليس لهذه الدالة نقطة انقلاب والدالة مقعرة في مجالها

6.جدول قيم مساعدة

الملاحظات	(x, y)	y	x
تقاطع+صغرى	$(0, -4)$	-4	0
اضافية	$(1, -3)$	-3	1
اضافية	$(-1, -3)$	-3	-1

ثم نرسم المخطط البياني للدالة كما في الشكل المجاور

$b)f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

1. أوسع مجال للدالة: أوسع مجال لهذه الدالة جميع الأعداد الحقيقية R لأن الدالة متعددة الحدود.

2. التناظر:

a) التناظر مع المحور Y

$$f(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x)$$

$$f(-x) = -x^3 - 6x^2 - 9x \neq f(x)$$

∴ الدالة غير متناظرة مع المحور (Y)

b) التناظر مع نقطة الأصل $\quad -f(x) = -(x^3 - 6x^2 + 9x)$

$$= -x^3 + 6x^2 - 9x$$

$$\because f(-x) \neq -f(x)$$

∴ الدالة غير متناظرة مع نقطة الأصل

3. نقاط التقاطع للدالة مع المحورين الإحداثيين.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$let \quad x = 0$$

$$\therefore f(x) = y = (0)^3 - 6(0)^2 + 9(0)$$

∴النقطة (0,0) هي نقطة تقاطع مع المحور Y

$$let\ y = 0$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x = 0$$

بأخراج عامل مشترك $\quad x(x^2 - 6x + 9) = 0$

$$x(x-3)^2 = 0$$

أما $\quad x = 0$

او $\quad (x-3)^2 = 0$

بجذر طرفي المعادلة $\quad x - 3 = 0$

$$\therefore x = 3$$

4. تعيين نقاط النهايات العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص للدالة:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

بإيجاد المشتقة ∴ $\quad f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

نضع المشتقة = صفر $\quad 3x^2 - 12x + 9 = 0$

بقسمة طرفي المعادلة على3 $\quad x^2 - 4x + 3 = 0$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$f'(x)$ إشارة $+++\ 1\ ----\ 3+++$

حيث استطعنا تعيين الإشارات على خط الاعداد بأخذ قيم لـ x من كل فترة وتعويضها في المشتقة الأولى.

عندما $x = 3$ تكون $y = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3)$

بالتعويض وإجراء التبسيط $y = 27 - 54 + 27 = 0$

$\therefore$ النقطة $P_1(3,0)$ نهاية صغرى $\Rightarrow \quad \therefore y = 0$

عندما $x = 1$ تكون $y = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1)$

بالتعويض وأجراء التبسيط $y = 1 - 6 + 9 = 4$

$\therefore$ النقطة $P_2(1,4)$ نهاية عظمى

مناطق التزايد: $\{x: 1 > x > 3, x \in R\}$

مناطق التناقص $\{x: 1 < x < 3,\ x \in R\}$

5. نعين مناطق الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

نجعل المشتقة الثانية $= 0$ $\quad 6x - 12 = 0$

$$6x = 12 \Rightarrow x = 2$$

نعوض قيمة $x = 2$ في الدالة الأصلية

$$f(x) = y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$y = (2)^3 - 6(2)^2 + 9(2)$$

$$= 8 - 24 + 18 = 2$$

$\therefore$النقطة (2,2)مرشحة كنقطة انقلاب

$f''(x)$ اشارة $----\ 2\ ++++$

$\cap \qquad \cup$

حيث نختار من كل فترة قيمة x ونعوض في المشتقة الثانية لمعرفة الإشارة ويتضح من خط الأعداد أن النقطة (2,2) تمثل نقطة انقلاب حقيقية

مناطق التحدب : $\{x: x < 2, x \in R\}$

مناطق التقعر : $\{x : x > 2, x \in R\}$

6. نقاط إضافية: - لأجل الدقة في الرسم نختار قيم أخرى لـ x

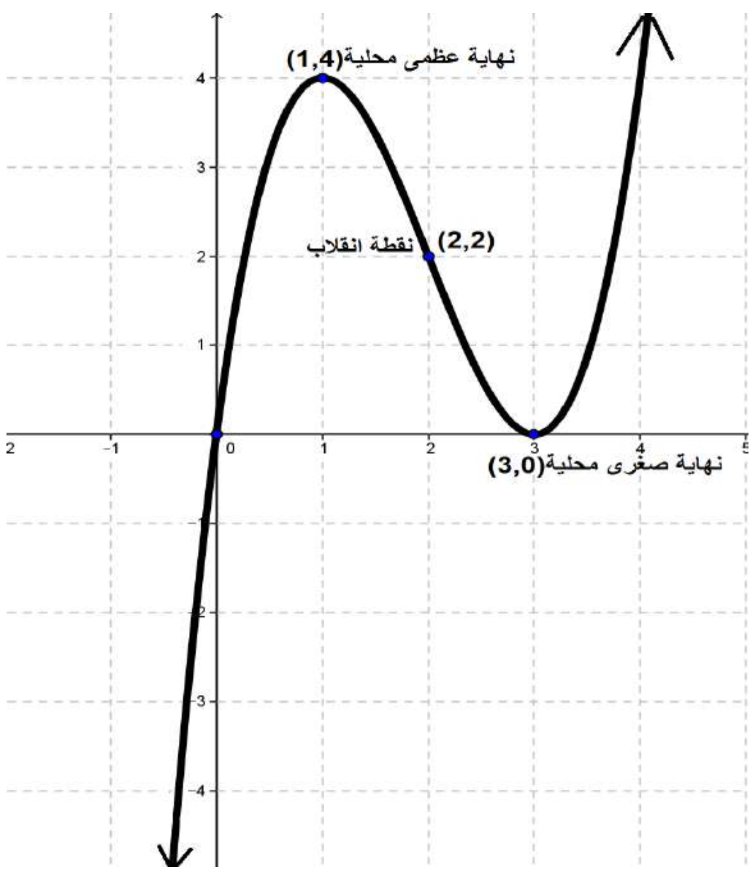
نعوض $x = -1$ في الدالة الأصلية

$$\therefore y = (-1)^3 - 6(-1)^2 + 9(-1)$$

$$y = -1 - 6 - 9 = -16 \Rightarrow (-1,-16)$$

x	y	(x,y)	الملاحظات
0	0	$(0,0)$	تقاطع
3	0	$(3,0)$	تقاطع
1	4	$(1,4)$	عظمى
3	0	$(3,0)$	صغرى
2	2	$(2,2)$	انقلاب
-1	-16	$(-1,-16)$	اضافية

ثم نرسم المخطط البياني للدالة كما في الشكل الاتي



تمرين (3-3)

باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحنيات الدوال الأتية:

1) $f(x) = x^2 - 6x - 7$ 2) $f(x) = x^4 - 1$

3) $f(x) = (x+1)^2$ 4) $f(x) = x^3 - 3x + 3$

5) $f(x) = x(x^2 - 12)$ 6) $f(x) = x^3 - 8$

7) $f(x) = (x+1)^2(x-2)$ 8) $f(x) = x^5 + 2x$

9) $f(x) = 6 - x - x^2$ 10) $f(x) = (2-x)^3 + 1$

7-3 تطبيقات عملية على النهايات العظمى والصغرى

لأجل حل المسائل العملية التي يطلب فيها إيجاد أكبر قيمة أو أقل قيمة لمتغير ما ضمن شروط معينة معطاة في المسألة نتبع الخطوات التالية :

1. نرسم شكلاً توضيحياً للمسألة (إن أمكن) ، ونؤشر عليه الأجزاء المهمة.
2. نعين الثوابت والمتغيرات في المسألة ونفرضها برموز نختارها.
3. نعتبر الكمية المطلوبة إيجاد قيمتها العظمى أو الصغرى والتي يعبر عنها بعبارة (أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن أو اقرب ما يمكن....) كمتغير أساسي ونفرضه (مثل y) ونعبر عنه بدلالة متغير واحد مستقل (مثل x).
4. إذا كان هناك متغيرات أخرى يعتمد عليها المتغير الأساسي فيجب أن نعبر عنها كلها بدلالة المتغير المستقل (x) وذلك باستعمال علاقات جبرية وهندسية معروفة مثل: مبرهنة فيثاغورس أو قانون مساحة أو حجم أو طول ....) بحيث يبقى لدينا متغير مستقل واحد (x) ويتم هذا من معطيات السؤال الأخرى.
5. نطبق طريقة إيجاد القيم العظمى والصغرى أي باشتقاق العلاقة النهائية وجعلها مساوية إلى الصفر ثم نكمل الحل كما مر سابقا.

ملاحظة: في معظم المسائل العملية لا نحتاج إلى اختبار نوع القيمة هل هي صغرى أم عظمى وخاصةً إذا كان للدالة نقطة حرجة واحدة كما في الأمثلة التالية التي توضح طريقة الحل:

مثال 15) :قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها $600\ m$، جد كل من بعديها بحيث تكون مساحتها أكبر ما يمكن ؟

الحـــل : نفرض أن أبعاد المستطيل هي x ، y وان المساحة هي A فتكون

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$\therefore \ \mathrm{A} = x.y \ \ldots\ldots(1)$$

يجب أن نجعل المساحة بدلالة المتغيرين

∴محيط المستطيل = (الطول + العرض) × 2

$$\therefore \ [600 = 2(x+y)] \ \ \div 2$$

$$\therefore 300 = x + y$$

$$\therefore y = 300 - x \ldots\ldots\ldots(2)$$

نعوض معادلة رقم (2) في (1) فنحصل على

$$A = x(300 - x)$$

$$A = 300x - x^2$$

$$A' = 300 - 2x$$

نجعل المشتقة = صفر $\quad 300 - 2x = 0$

$$\therefore 2x = 300$$

طول أحد الضلعين $\quad x = \frac{300}{2} = 150m$

$$\therefore \ y = 300 - x$$

$$= 300 - 150$$

طول الضلع الآخر $\quad y = 150m$

وللتأكد ان قيمة x هي القيمة العظمى نأخذ المشتقة الثانية ثم نعوض قيمة x المستخرجة في المشتقة الثانية فإذا كانت اشارة القيمة النهائية للمشتقة سالبة فالقيمة تمثل نهاية عظمـــى وإذا كانت الإشارة موجبة فالنهاية تمثل نهاية صغرى محلية كما في المثال :

$$A' = 300 - 2x$$

نأخذ المشتقة الثانية للدالة $\quad \therefore A'' = -2$

وبما ان القيمة للمشتقة سالبة فتكون نهاية عظمى عند $x = 150$

مثال 16) :ما العددان اللذان مجموعهما 20 ومجموع مربعيهما أقل ما يمكن ؟

الحل : نفرض العدد الأول x

نفرض العدد الثاني y

ونفرض مجموع مربعيهما Z

$$x + y = 20$$

$$\therefore \quad y = 20 - x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

مجموع مربعي العددين هو

$$z = x^2 + y^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

نعوض معادلة رقم (1) في المعادلة رقم (2)

$$z = x^2 + (20 - x)^2$$

$$= x^2 + 400 - 40x + x^2$$

$$z = 2x^2 - 40x + 400$$

$$\frac{dz}{dx} = 4x - 40$$

نجعل المشتقة = صفر

$$\therefore 4x - 40 = 0$$

$$4x = 40$$

$x = 10$ العدد الأول

$$\therefore y = 20 - x$$

$y = 20 - 10 = 10$ العدد الثاني

وللتأكد أن قيمة x هي قيمة صغرى نستخرج المشتقة الثانية كالاتي :

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 4$$

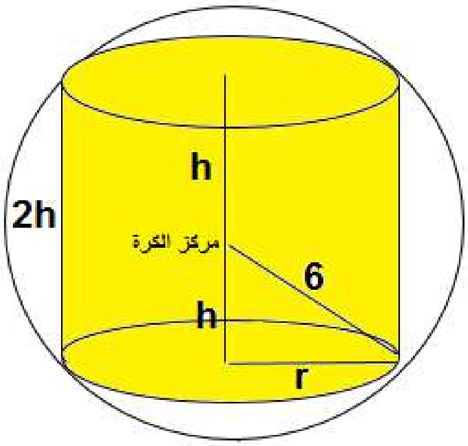
وبما ان القيمة موجبة فهي نهاية صغرى.

مثال 17) :جد حجم أكبر أسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها $6\ cm$ ؟

الحل : نفرض نصف قطر الأسطوانة r

نفرض ارتفاع الأسطوانة $2h$

(انظر الشكل 3-5 المجاور)



الشكل 3-5

الأن وحسب مبرهنة فيثاغورس

$$h^2 + r^2 = 36$$

$$r^2 = 36 - h^2 \quad \dots.(1)$$

$$\because \quad V = \pi\, r^2\, 2h \dots(2)$$

بتعويض المعادلة (1) في معادلة (2) ينتج :

$$V = 2\pi h(36 - h^2)$$

$$V = 72\pi h - 2\pi h^3$$

$$\frac{dV}{dh} = 72\pi - 6\pi h^2$$

$$[72\pi - 6\pi h^2 = 0] \qquad \div 6\pi$$

$$12 - h^2 = 0$$

$$h^2 = 12$$

$$h = \mp\sqrt{12}$$

$h = \sqrt{12}$, $h = -\sqrt{12}$ يهمل

$h = 2\sqrt{3}\ \ cm$ الارتفاع

$$r^2 = 36 - 12 = 24$$

$r = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}\ \ cm$ نصف القطر

$$\therefore V = r^2\pi \times 2h$$

$$V = 24\pi \times 2 \times 2\sqrt{3}$$

$V = 96\sqrt{3}\pi\ \ cm^3$ حجم الأسطوانة

تمرين (3-4)

1. عددان مجموعهما 24 برهن أن حاصل ضربهما أكبر ما يمكن عندما يكونان متساويان.
2. قسم العدد (60) إلى جزأين بحيث أن حاصل ضرب أحد هذين الجزئين في مكعب الجزء الآخر يكون أكبر ما يمكن.
3. جد مساحة أكبر مثلث متساوي الساقين يمكن رسمه داخل كرة نصف قطرها $(6\ cm)$.
4. لوح مستطيل محيطه $40\ cm$ ، أدير حول أضلاعه فكون أسطوانة دائرية قائمة. جد بعـــــدي المستطيل بحيث أن حجم الأسطوانة المتكون يكون أكبر ما يمكن.
5. حديقة منزلية مستطيلة الشكل يحدها المنزل من أحدى جهاتها جد أكبر مساحة من الأرض يمكن تسييجها بسياج طوله $20\ m$.
6. جد النقاط التي تقع على المنحني $y^2 = x^2 - 3$ وتكون أقرب ما يمكن من النقطة $(4,0)$.
7. جد عدد حقيقي موجب بحيث يكون حاصل جمعه مع مقلوبه أصغر ما يمكن.
8. أسطوانة دائرية حجمها $8\pi\ cm^3$ ، جد أبعادها بحيث أن كمية المعدن المستخـــــدم لعملهـــا (اي مساحتها السطحية) أقل ما يمكن إذا كانت الأسطوانة مفتوحة من الأعلى.
9. جد حجم اكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها $3\ cm$.
10. جد حجم أكبر أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته $12\ cm$ وارتفاعه $20\ cm$.

الفصل الرابع

التكامل Integration

الأهداف السلوكية:

ينبغي للطالب في نهاية هذا الفصل ان يكون قادراً على ان :

1. يتعرف على مفهوم الدالة المقابلة للتوصل إلى مفهوم التكامل كعملية عكسية للمشتقة.
2. يتعرف على مفهوم التكامل غير المحدد ويستوعب القواعد الأساسية له مع إيضاحات حول كيفية التعامل مع الأسئلة المتنوعة التي تحتوي تكاملات لأقواس مضروبة ببعضها أو أقواس مرفوعة إلى اس أو دوال مقسومة على بعضها.
3. يتمكن من حل مسائل التطبيق الهندسي (إيجاد معادلة المنحني اذا علم ميل المماس له).
4. يتمكن من حل مسائل التطبيق الفيزيائي (الإزاحة-السرعة – التعجيل).
5. يتعرف على مفهوم التكامل المحدد وخواصه ويتمكن من استخدامها في إيجاد المساحات المحددة بمنحني الدالة ومحور السينات أو بين منحني دالتين.
6. يتمكن من حل مسائل التطبيقات الفيزيائية للتكامل المحدد (المسافة – الإزاحة).

الفصل الرابع

التكامل Integration

المحتوى العلمي

1-4 مفاهيم عامة

2-4 الدالة المقابلة

3-4 التكامل غير المحدد

1-3-4 القواعد الأساسية للتكامل غير المحدد

2-3-4 خواص التكامل غير المحدد

3-3-4 مهارات في استخراج قيمة التكامل

4-4 تطبيقات على التكامل غير المحدد

1-4-4 التطبيق الهندسي (إيجاد معادلة المنحني اذا علم ميل المماس له)

2-4-4 التطبيق الفيزيائي (الإزاحة-السرعة – التعجيل)

5-4 التكامل المحدد

1-5-4 خواص التكامل المحدد

6-4 إيجاد مساحة المنطقة المستوية باستخدام التكامل المحدد

1-6-4 مساحة المنطقة المستوية المحددة بين منحني الدالة والمحور x

4- 6-2 مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحني دالتين

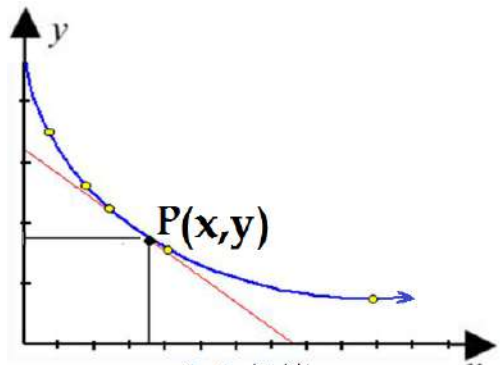
7-4 التطبيق الفيزيائي للتكامل المحدد (الإزاحة-المسافة)

الفصل الرابع
التكامل Integration

1-4 مفاهيم عامة

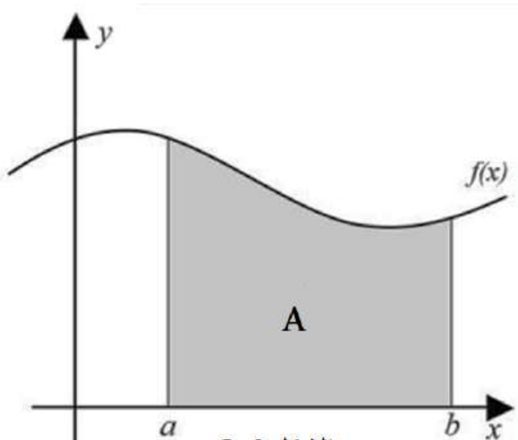
يدرس علم التفاضل والتكامل المسألتين الاتيتين والمسائل المتفرعة منهما :

1) حساب ميل المماس عند النقطة $P(x,y)$ التي تنتمي إلى منحني الدالة $y = f(x)$.



الشكل 1-4

2) حساب المساحة A أسفل المنحني $y = f(x)$ بين النقطتين a, b



الشكل 2-4

حساب التفاضل (Differential calculus) هو فرع من فروع الرياضيات يندرج تحت حساب التفاضل والتكامل (Calculus) ، يختص بدراسة معدل تغير دالة ما ولتكن الدالـــــة $y = f(x)$ بالنسبة للمتغير المستقل (x) .

أول المسائل التي يعنى هذا الفرع الرياضي بدراستها هو الاشتقاق. مشتقة الدالة $y = f(x)$ عند نقطة ما تصف السلوك الرياضي والهندسي للدالة عند هذه النقطة أو عند النقاط القريبة جداً منها، والمشتقة الأولى للدالة عند نقطة معينة تساوي قيمة ميل المماس للدالة عند هذه النقطة، وبصفة عامة فإن المشتقة الأولى للدالة عند نقطة معينة تمثل أفضل (تقريب خطي) للدالة عند هذه النقطة.

ان عملية إيجاد المشتقات تسمى (التفاضل)، والنظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل تنص على أن التفاضل هو العملية العكسية للتكامل، تماما كما تعد عمليتا القسمة والطرح عمليتين عكسيتين للضرب والجمع على التوالي. في علم الرياضيات، تعتبر مكاملة الدالة نوعاً من التعميم لكميات قابلة

للتجزئة مثل :المساحة أو الحجم أو الكتلة أو أي مجموع لعناصر متناهية في الصغر، وأيضاً يمكن أن نقول ان عملية التكامل هي عملية عكسية لعملية التفاضل.
بالرغم من تعدد التعاريف المستخدمة للتكامل وتعدد طرق استخدامه فإن نتيجة هذه الطرق جميعها متشابهة وجميع التعاريف تؤدي في النهاية إلى المعنى ذاته.
وتنص المبرهنة الأساسية في التكامل على أن مشتق تابع المساحة تحت منحني الدالة هو الدالة نفسها.
يقوم حساب التكامل على إيجاد التابع الأصلي للدالة التي نريد القيام بمكاملتها.وقد عرض جوتفريد لايبنتز، في 13 نوفمبر 1675، أول عملية تكامل لحساب المساحة تحت منحنى الدالة $y = f(x)$.
هنالك عدة طرق للتكامل منها: التكامل بالتجزئة ،التكامل بالتعويض، التحويل إلى الكسور الجزئية، الاختزال المتتالي والتي سوف يتعرف الطالب عليها في دراسته الجامعية ان شاء الله عز وجل.

2-4 الدالة المقابلة

لو كانت لدينا الدالة $y = x^2$ فان مشتقة هذه الدالة هي $\frac{dy}{dx} = 2x$

ولو كانت لدينا الدالة $y = x^2 + 2$ فان مشتقة هذه الدالة أيضاً هي $\frac{dy}{dx} = 2x$

ولو كانت لدينا الدالة $y = x^2 - \sqrt{2}$ فان مشتقة هذه الدالة أيضاً هي $\frac{dy}{dx} = 2x$

ولو كانت لدينا الدالة $y = x^2 - \frac{2}{5}$ فان مشتقة هذه الدالة أيضاً هي $\frac{dy}{dx} = 2x$

نلاحظ ان تلك الدوال مختلفة لكن جميعها لها نفس المشتقة كما نلاحظ ان الاختلاف بين الدوال هو في الحد الثابت فقط.

الأن لو سألنا السؤال التالي (ما هي الدالة التي مشتقتها $\frac{dy}{dx} = 2x$ ؟). نلاحظ أننا نستطيع الإجابة بذكر أي من الدوال تلك أو أية دالة أخرى بالصورة : ثابت $+ \ y = x^2$ ولو استخدمنا c كرمز للثابت فان الإجابة الأكثر شمولاً وعمومية للسؤال الذي أوردناه سلفاً هي :

$$y = F(x) = x^2 + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

تسمى $(F(x) = x^2 + \mathrm{c})$ الدالة المقابلة للدالة $f(x) = 2x$.

تعريف 4-1 الدالة المقابلة :
لتكن $y = f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ فأن كل دالة $y = F(x)$ مستمرة على نفس الفترة وتحقق العلاقة:

$$F'(x) = f(x) \quad , \forall x \in (a, b)$$

تسمى الدالة المقابلة (أو معكوس المشتقة) للدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]: a, b \in \mathbb{R}$


مثال 1) : أذا كانت $f(x) = 5x^4$ فان الدالة المقابلة للدالة $f(x)$ هي

$F(x) = x^5 + c$ لأن : $F'(x) = 5x^4 = f(x)$

مثال 2) : إذا كانت $f:[1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2$ فأن :

$F:[1,2] \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^3 + c$ هي الدالة المقابلة لأن :

$$F'(x) = 3x^2 = f(x), \forall x \in [1,2]$$

ملاحظة: اتفق علماء الرياضيات على التعبيرعن العلاقة بين الدالة والدالة المقابلة لها رمزياً كالاتي

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

وتقرأ (تكامل الدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x)

مثال 3) :أثبت ان $F(x) = \sqrt{1 - x^2}$ هي الدالة المقابلة للدالة $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

ثم عبر عنها رمزياً مستخدماً رمز التكامل.

الحل: $F(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.(-2x)$

$$F'(x) = \frac{-2x}{2(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = f(x)$$

ونستطيع التعبير رمزياً كالاتي :

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \sqrt{1 - x^2} + c$$

مثال 4) :أذا كانت $F(x)$ هي الدالة المقابلة للدالة $f(x) = ax + b$ وكان :

$F''(2) = 5$ ، $F'(2) = 7$ ،جد قيمة كلاً من $a, b \in \mathbb{R}$

الحل: بما ان $F(x)$ هي الدالة المقابلة للدالة $f(x) = ax + b$ لذلك يكون :

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow F'(x) = ax + b$$

$$F''(x) = a \Rightarrow \because F''(2) = 5 \Rightarrow a = 5$$

$$\because F'(2) = 7$$

$$\therefore a(2) + b = 7 \Rightarrow 5(2) + b = 7 \Rightarrow 10 + b = 7$$

$$b = 7 - 10 \Rightarrow b = -3$$

3-4 التكامل غير المحدد (Indefinite Integral)

عرفنا في البند السابق انه ان كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فانه توجد دالة مقابلة $F(x)$ مستمرة على نفس الفترة بحيث ان $F'(x) = f(x)\ ,\forall x \in (a,b)$ فمثلاً :

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = x^2$ هي الدالة المقابلة للدالة $f(x) = 2x$

ولكن هل $F(x) = x^2$ هي الدالة المقابلة الوحيدة للدالة $f(x) = 2x$؟ وقبل الاجابة عـــــن السؤال هذا لنتأمل الدوال الاتية :

1) $F_1: [1,3] \to \mathbb{R}, F(x) = x^2 + 1$

2) $F_2: [1,3] \to \mathbb{R}, F(x) = x^2 + \frac{1}{2}$

3) $F_3: [1,3] \to \mathbb{R}, F(x) = x^2 - \sqrt{2}$

4) $F_4: [1,3] \to \mathbb{R}, F(x) = x^2 - 5$

سوف نلاحظ ان كلاً من F_1, F_2, F_3, F_4 لها صفات F ذاتها أي ان كلاً منها مستمر على $[1,3]$ وقابلة للاشتقاق على $(1,3)$ فضلاً عن ان :

$$F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = F_4'(x) = 2x \quad ,\forall x \in (1,3)$$

وبناء على ذلك فانه يمكننا القول ان كلاً من F_1, F_2, F_3, F_4 دالة مقابلة إلى f. أي انه توجد أكثر من دالة مقابلة للدالة المستمرة على فترة ما.كما ان الفرق بين أي دالتين مقابلتين لنفس الدالة يساوي عدداً ثابتاً ، فمثلاً :

$$F_1(x) - F_4(x) = (x^2 + 1) - (x^2 - 5) = 6$$

ملاحظة : يمكننا القول بصورة عامة انه اذا كانت للدالة $f(x)$ دالة مقابلة$F(x)$ فانه يوجد عدد لانهائي من الدوال المقابلة للدالة $f(x)$ كل منها تكون بالصيغة $F(x) + c$ حيث c عدد ثابت وان الفرق بين أي اثنين منها يساوي عدداً ثابتاً.

تعريف 2-4 التكامل غيرالمحدد: تسمى مجموعة الدوال المقابلة بالصيغة $F(x) + c$ المستمرة على الفترة $[a,b]$ بالتكامل غير المحدد للدالة $f(x)$ ويرمز لها بالرمز

$$\int f(x)dx$$

إذا كان رمز المتغير هو x كما يصطلح على كتابة التكامل غير المحدد بالطريقة الأتية :

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

حيث $c \in \mathbb{R}$ يسمى ثابت التكامل.

1-3-4 القواعد الأساسية للتكامل غير المحدد

1) $\int a\,dx = ax + c \ ,\forall a \in \mathbb{R}$

$ex{:}\int dx = x + c \qquad , \quad ex{:}\int \sqrt{3}\,dx = \sqrt{3}x + c$

2) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1$

$ex: \int x^5\, dx \;= \dfrac{x^6}{6} + c$

$ex: \int x^{-5}\, dx \;= \dfrac{x^{-4}}{-4} + c = \dfrac{-1}{4x^4} + c$

2-3-4 خواص التكامل غير المحدد

1) $\int f(x) \pm g(x).dx = \int f(x)dx \;\pm \int g(x)dx$

$ex: \int (x^4 + x^3 - x^2)\, dx \;= \int x^4\, dx + \int x^3\, dx - \int x^2\, dx$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + c$$

لاحظ إننا في الأمثلة القادمة سوف نختصر الخطوات ونجري عملية التكامل دون توزيع علامة التكامل على حدود الدالة المطلوب تكاملها.

2) $\int a\, f(x)dx = a \int f(x)\, dx = a.F(x) + c$

$ex: \int 5(2x^2 - 3x + 5)\, dx \;= 5 \int (2x^2 - 3x + 5)\, dx$

$$= 5\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x\right) + c$$

$$= \frac{10x^3}{3} - \frac{15x^2}{2} + 25x \;+ c$$

مثال 5) :باستخدام قواعد وخواص التكامل جد ثلاثة دوال مقابلة للدالة $f(x) = 3x^2 + 5$.

الحل : $F(x) = \int (3x^2 + 5)dx = \frac{3x^3}{3} + 5x + c = \; x^3 + 5\,x + c$

ولإيجاد الدوال الثلاثة المقابلة المطلوبة نختار ثلاث قيم عشوائياً نعوضها بدلاً عن ثابت التكامل c وكالاتي:

$$c = 1 \Rightarrow F_1(x) = x^3 + 5x + 1$$

$$c = -\frac{1}{2} \Rightarrow F_2(x) = x^3 + 5x - \frac{1}{2}$$

$$c = \sqrt{5} \Rightarrow F_3(x) = x^3 + 5x + \sqrt{5}$$

مثال 6) : باستخدام قواعد وخواص التكامل جد الدالة المقابلة للدالة $f(x) = 3x^2 - 5$ إذا علمت ان $F(1) = 2$.

الحل :

$$F(x) = \int (3x^2 - 5)\, dx = \frac{3x^3}{3} - 5x + c = x^3 - 5x + c$$

$$\because F(1) = 2$$

$$\therefore F(1) = (1)^3 - 5(1) + c$$

$$2 = -4 + c$$

$$c = 2 + 4 = 6$$

$$\therefore F(x) = x^3 - 5x + 6$$

مثال 7) : جد قيمة التكاملات الأتية :

$$1) \int \sqrt[3]{x^5}\ dx\ , \qquad 2) \int x^2 \sqrt[5]{x^3}\ dx\ , \qquad 3) \int \sqrt{x}\ dx$$

$$4) \int \sqrt[5]{x^{-3}}\ dx\ , \qquad 5) \int \sqrt{x^{-7}}\ dx$$

الحل:

$$1) \int \sqrt[3]{x^5}\ dx = \int x^{\frac{5}{3}} dx$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + c = \frac{3}{8} \sqrt[3]{x^8} + c$$

$$2) \int x^2 . \sqrt[5]{x^3}\ dx = \int x^2 . x^{\frac{3}{5}} . dx = \int x^{2+\frac{3}{5}}\, dx$$

$$= \int x^{\frac{13}{5}}\ dx = \frac{x^{\frac{13}{5}+1}}{\frac{13}{5}+1} + c$$

$$= \frac{x^{\frac{18}{5}}}{\frac{18}{5}} + c = \frac{5}{18}\sqrt[5]{x^{18}} + c$$

$$3)\ \int \sqrt{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx \ = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c \ = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \ = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

$$4)\ \int \sqrt[5]{x^{-3}}\ dx = \int x^{\frac{-3}{5}} dx \ = \frac{x^{\frac{-3}{5}+1}}{\frac{-3}{5}+1} + c$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + c = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + c$$

$$5)\ \int \sqrt{x^{-7}}\ dx = \int x^{\frac{-7}{2}} dx \ = \frac{x^{\frac{-7}{2}+1}}{\frac{-7}{2}+1} + c$$

$$= \frac{x^{\frac{-5}{2}}}{\frac{-5}{2}} + c \ = \frac{-2}{5}\sqrt{x^{-5}} + c \ = \frac{-2}{5\sqrt{x^5}} + c$$

4-3-3 مهارات في استخراج قيمة التكامل

أولا) لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين جبريتين أو أكثر نضرب الدوال ببعضها بطريقة التوزيع ثم نكامل الحدود حداً حداً.

مثال 8) :جد قيمة التكاملات الأتية :

$$1)\ \int (x-2)(2x+3)dx \qquad , \quad 2)\ \int (x-1)(x+1)(2x-5)dx$$

الحل:

$$1)\ \int (x-2)(2x+3)dx \ = \int (2x^2+3x-4x-6)\ dx$$

$$= \int (2x^2 - x - 6)\ dx$$

$$= \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + c$$

$$2) \int (x-1)(x+1)(2x-5)dx = \int (x^2-1)(2x-5)dx$$

$$= \int (2x^3-5x^2-2x+5)dx$$

$$= \frac{2x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 5x + c$$

$$= \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} - x^2 + 5x + c$$

ثانياً) لإيجاد تكامل حاصل قسمة دالتين نحاول تحليل الدالتين أو إحداهما بحثاً عن اختصارات ممكنة. وفي حالة تعذر ذلك فأننا نقوم برفع المقام إلى البسط مع تغيير إشارة الأس من الموجب إلى السالب أو بالعكس.

مثال 9) :جد قيمة التكاملات الأتية :

$$1) \int \frac{x^2-9}{x-3}\, dx \quad , \quad 2) \int \frac{x^2+5x+6}{x+2}\, dx$$

$$3) \int \frac{3}{x^4}\, dx \quad , \quad 4) \int \frac{-2}{\sqrt[5]{x^2}}\, dx$$

الحل :

$$1) \int \frac{x^2-9}{x-3}\, dx = \int \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}\, dx = \int (x+3)\, dx = \frac{x^2}{2} + 3x + c$$

$$2) \int \frac{x^2+5x+6}{x+2}\, dx = \int \frac{(x+3)(x+2)}{x+2}\, dx = \int (x+3)\, dx = \frac{x^2}{2} + 3x + c$$

$$3) \int \frac{3}{x^4}\, dx = 3\int x^{-4}\, dx = (3)\frac{x^{-3}}{-3} + c = \frac{-1}{x^3} + c$$

$$4) \int \frac{-2}{\sqrt[5]{x^2}}\, dx = \int \frac{-2}{x^{\frac{2}{5}}}\, dx = -2\int x^{-\frac{2}{5}} dx$$

$$= (-2)\frac{x^{-\frac{2}{5}+1}}{-\frac{2}{5}+1} + c = (-2)\frac{x^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + c$$

$$= (-2)\left(\frac{5}{3}\right)x^{\frac{3}{5}} + c = -\frac{10}{3}\sqrt[5]{x^3} + c$$

ثالثاً) لإيجاد تكامل دالتين إحداهما داخل قوس مرفوع لأس أو تحت جذر والأخرى مشتقتها نستخدم القاعدة الأتية :

$$\boxed{\int [f(x)]^n . f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1}$$

مثال 10) :جد قيمة التكامل الاتي :

$$\int (3x^2 + 5x - 3)^3 \, (6x + 5)dx$$

الحل : لاحظ ان $(6x + 5)$ هي مشتقة الدالة $3x^2 + 5x - 3$ وباستخدام القاعدة التي أوردناها أعلاه نلاحظ ان المقدار $(6x + 5)$ يهمل عند اجراء التكامل ونجري عملية التكامل على القوس المرفوع لأس عن طريق زيادة الاس بمقدار (1) والقسمة على الاس الجديد كما أسلفنا في القاعدة الثانية. اي :

$$\int (3x^2 + 5x - 3)^3 \, (6x + 5)dx = \frac{(3x^2 + 5x - 3)^4}{4} + c$$

مثال 11) :جد قيمة التكامل الاتي :

$$\int \sqrt[3]{(2x^2 - 5)} \, . (4x\,)dx$$

الحل:

$$\int \sqrt[3]{(2x^2 - 5)} \, . (4x\,)dx = \int (2x^2 - 5)^{\frac{1}{3}} \, . (4x) \, dx$$

نلاحظ ان $4x$ هي مشتقة الدالة $(2x^2 - 5)$ الموجودة داخل القوس المرفوع للاس لذلك تهمل ونكامل القوس المرفوع لأس بزيادة أسه بمقدار (1) والقسمة على الاس الجديد. اي :

$$= \frac{(2x^2 - 5)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3} + 1} + c \quad = \frac{(2x^2 - 5)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$$

$$= \frac{3(2x^2 - 5)^{\frac{4}{3}}}{4} = \frac{3\sqrt[3]{(2x^2 - 5)^4}}{4} + c$$

مثال 12) :جد قيمة التكامل الاتي :

$$\int x^2\sqrt{x^3+8}\,dx$$

الحل:

$$\int x^2\sqrt{x^3+8}\,dx=\int x^2(x^3+8)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

نلاحظ في المثال هذا ان مشتقة المقدار x^3+8 تساوي $3x^2$ في حين ان ما موجود داخل التكامل هو x^2 فقط لذلك فاننا نقوم بضرب المقدار x^2 بالعدد 3 وهذا بالطبع يتطلب ضرب التكامل بالعدد $\frac{1}{3}$ كي لا تتغير قيمة ناتج التكامل (لاحظ اننا بهذا الاسلوب ضربنا التكامل بالعدد 1 وهو فعلاً لا يغير قيمة التكامل).

$$\int x^2\sqrt{x^3+8}\,dx=\frac{1}{3}\int(3x^2)(x^3+8)^{\frac{1}{2}}\,dx=\left(\frac{1}{3}\right).\frac{(x^3+8)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right)(x^3+8)^{\frac{3}{2}}+c\;=\;\frac{2}{9}\sqrt{(x^3+8)^3}+c$$

مثال 13) :جد قيمة التكامل الاتي :

$$\int(3x-3)\sqrt{x^2-2x}\;dx$$

الحل :

$$\int(3x-3)\sqrt{x^2-2x}\;dx=\int 3(\,x-1)\sqrt{x^2-2x}\;dx$$

$$=3\int(\,x-1)(x^2-2x)^{\frac{1}{2}}\;dx$$

[مشتقة القوس من الداخل تساوي $2x-2=2(x-1)$]

$$=3.\left(\frac{1}{2}\right)\int[2(\,x-1)](x^2-2x)^{\frac{1}{2}}\;dx$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right).\frac{(x^2-2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c\;=\;(x^2-2x)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\sqrt[2]{(x^2-2x)^3}+c$$

مثال 14) : جد قيمة التكامل الاتي :

$$\int (3x-1)\sqrt{3x^2-2x+3}\ dx$$

الحل :

$$\int (3x-1)\sqrt{3x^2-2x+3}\ dx = \int (3x-1)(3x^2-2x+3)^{\frac{1}{2}}\ dx$$

[مشتقة القوس من الداخل تساوي $6x-2=2(3x-1)$]

$$=\frac{1}{2}\int 2(3x-1)(3x^2-2x+3)^{\frac{1}{2}}\ dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right).\frac{(3x^2-2x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{2}{3}\right)(3x^2-2x+3)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right).\ \sqrt{(3x^2-2x+3)^3}+c$$

مثال 15) :جد قيمة التكامل الاتي :

$$\int (2x^6-3x)^4\ dx$$

الحل :

$$\int (2x^6-3x)^4\ dx = \int [x(2x^5-3)]^4\ dx$$

$$=\int x^4.(2x^5-3)^4\,dx$$

[مشتقة القوس من الداخل تساوي $10x^4$]

$$=\frac{1}{10}\int (10x^4).(2x^5-3)^4\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{10}\right).\frac{(2x^5-3)^5}{5}+c$$

$$=\frac{(2x^5-3)^5}{50}+c$$

مثال 16) :جد قيمة التكامل الاتي :

$$\int \frac{(\,x^2 - \,x)^{10}}{x^{10}}\,dx$$

الحل:

$$\int \frac{(x^2 - \,x)^{10}}{x^{10}}\,dx = \int \frac{[x(x - \,1)]^{10}}{x^{10}}\,dx$$

$$= \int \frac{x^{10}\,(x-1)^{10}}{x^{10}}\,dx$$

$$= \int (x-1)^{10}\,\,dx$$

[مشتقة القوس من الداخل تساوي ***1***]

$$= \frac{(x-1)^{11}}{11} + c$$

مثال 17) :جد قيمة التكامل الاتي :

$$\int \frac{(3-x)^5}{(3-x)^{10}}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{(3-x)^5}{(3-x)^{10}}\,dx = \int \frac{1}{(3-x)^5}\,dx$$

$$= \int (3-x)^{-5}\,\,dx$$

[مشتقة القوس من الداخل تساوي $(-\mathbf{1})$]

$$= -\int (-1)(3-x)^{-5}\,\,dx$$

$$= -\frac{(3-x)^{-4}}{-4} + c$$

$$= \frac{1}{4(3-x)^4} + c$$

مثال 18) :جد قيمة التكامل الاتي :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{9-12x+4x^2}}$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{9-12x+4x^2}}\ dx = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-2x)^2}} = \int \frac{dx}{(3-2x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \int \underbrace{(3-2x)^{\frac{-2}{3}}\ dx}_{\text{[مشتقة القوس من الداخل تساوي } (-2)\text{]}} = \frac{-1}{2}\int (-2)\ (3-2x)^{\frac{-2}{3}}\ dx$$

$$= \left(\frac{-1}{2}\right)\frac{(3-2x)^{\frac{-2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + c = \left(\frac{-1}{2}\right).\frac{(3-2x)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c$$

$$= \left(\frac{-1}{2}\right).\left(\frac{3}{1}\right)\sqrt[3]{3-2x} + c = \frac{-3\sqrt[3]{3-2x}}{2} + c$$

مثال 19) :جد قيمة التكامل الاتي :

$$\int \frac{2x-6}{\sqrt{(3-x)}}\ dx$$

الحل :

$$\int \frac{2x-6}{\sqrt{(3-x)}}\ dx = 2\int \frac{x-3}{(3-x)^{\frac{1}{2}}}\ dx = -2\int \frac{3-x}{(3-x)^{\frac{1}{2}}}\ dx$$

$$= -2\int \underbrace{(3-x)^{\frac{1}{2}}\ dx}_{\text{[مشتقة القوس من الداخل تساوي } (-1)\text{]}} = 2\int -(3-x)^{\frac{1}{2}}\ dx$$

$$= (2).\frac{(3-x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2(3-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= (2).\left(\frac{2}{3}\right)\ (3-x)^{\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{(3-x)^3}}{3} + c$$

تمرين (4-1)

1. أثبت ان الدالة $F(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2$ هي الدالة المقابلة للدالة $f(x) = \frac{-2x}{(x-1)^3}$

2. أذا كانت $F(x)$ هي الدالة المقابلة للدالة $f(x) = ax^3 + bx$ وكان :

$F'(-2) = 12$ ، $F''(2) = 12$

جد قيمة كل من $a , b \in \mathbb{R}$

3. جد قيمة التكاملات الأتية:

$$1) \int \frac{x^5 - x^2}{x^2 + x + 1}\, dx \quad , \quad 2) \int \sqrt{3x^4 - 10x^2}\, dx$$

$$3) \int \frac{\sqrt{10 - \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{2x^2}}\, dx \quad , \quad 4) \int (4x^2 - 4x + 1)^{\frac{1}{3}}\, dx$$

$$5) \int \frac{5x - 10}{\sqrt[3]{2 - x}}\, dx \quad , \quad 6) \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}\, dx$$

$$7) \int \frac{5x + 2}{\sqrt{5x + 2}}\, dx \quad , \quad 8) \int \frac{x - 5\sqrt{x} + 6}{x - 3\sqrt{x}}\, dx$$

4-4 تطبيقات على التكامل غير المحدد

1-4-4 التطبيق الهندسي (إيجاد معادلة المنحني اذا علم ميل المماس له)

سوف ندرس كيفية استخراج معادلة المنحني اذا علم ميل المماس له ونذكر هنا ببعض الحقائق الأساسية التي سبق ان درسنا بعضها في الصف الثاني عندما تناولنا بالبحث فصل المشتقة.

1) ميل المماس للمنحني هو المشتقة الأولى لمعادلته.

2) اذا كان المنحني يمر بنقطة ما فان إحداثيي النقطة يحققان معادلته.

3) عند النقاط الحرجة ونقاط النهايات العظمى والصغرى المحلية تكون $f'(x) = 0$.

4) تكامل المشتقة الثانية يعطي المشتقة الأولى وتكامل المشتقة الأولى يعطي معادلة المنحني.

مثال 20) :جد معادلة المنحني المار بالنقطة $(1,3)$ وميل المماس له عند اية نقطة من نقاطه يساوي $3x^2 - 10x$.

الحل:

بما ان ميل المماس = المشتقة فأن :

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 10x$$

$$\int dy = \int (3x^2 - 10x)dx$$

$$y = x^3 - 5x^2 + c$$

وبما ان النقطة $(1,3)$ تحقق معادلة المنحني يكون :

$$3 = (1)^3 - 5(1)^2 + c$$

$$3 = -4 + c$$

$$c = 7$$

اذن معادلة المنحني هي : $y = x^3 - 5x^2 + 7$

مثال 21) :اذا كان للمنحني $f(x)$ نهاية صغرى محلية قيمتها 6 وميله عند اية نقطة من نقاطه هو $6x^2 - 12x$ ، جد معادلة المنحني .

الحل:

$$m = \frac{dy}{dx} = 6x^2 - 12x$$

$$\int dy = \int (6x^2 - 12x)dx$$

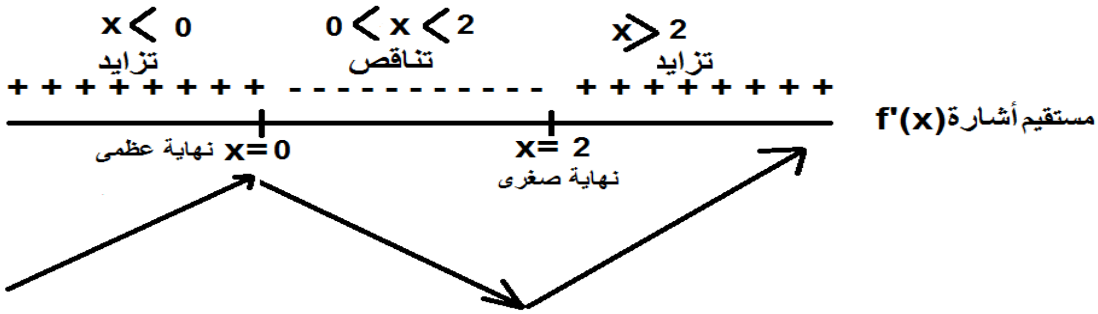
$$y = 2x^3 - 6x^2 + c \dots (1)$$

وحيث ان للدالة نهاية صغرى يكون $f'(x) = 0$ أي :

$$6x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad or \quad x = 2$$

وبتدقيق إشارة $f'(x)$ على خط الاعداد يتبين ان للدالة نهاية صغرى محلية عند $x = 2$



أي ان نقطة النهاية الصغرى هي $(2,6)$ وهي تحقق المعادلة (1) اي

$$6 = 2(2)^3 - 6(2)^2 + c$$

$$6 = 16 - 24 + c$$

$$c = 6 + 8 = 14$$

اذن معادلة المنحني هي : $y = 2x^3 - 6x^2 + 14$

مثال 22) :جد معادلة المنحني الذي المشتقة الثانية لمعادلته تساوي $6x$ ويمر بالنقطتين $(-1,4)$ ، $(1,8)$.

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{d^2y}{dx^2} = \int 6xdx = 3x^2 + c_1$$

$$\int dy = \int (3x^2 + c_1)dx$$

$$y = x^3 + c_1x + c_2$$

النقطة $(-1,4)$ تحقق المعادلة

$$4 = (-1)^3 + c_1(-1) + c_2$$

$$\boxed{c_1 - c_2 = -5} \ldots (1)$$

النقطة $(1,8)$ تحقق المعادلة

$$8 = (1)^3 + c_1(1) + c_2$$

$$\boxed{c_1 + c_2 = 7} \ldots (2)$$

وبحل المعادلتين (1) و (2) آنياً كما يأتي نحصل على قيم كل من c_1, c_2

$$c_1 - c_2 = -5$$

$$c_1 + c_2 = 7$$

بالجمع ـــــــــــــــ

$$2c_1 = 2$$

$$c_1 = 1$$

$$1 - c_2 = -5$$

$$c_2 = 6$$

اذن معادلة المنحني هي : $y = x^3 + x + 6$

2-4-4 التطبيق الفيزياوي (الإزاحة – السرعة – التعجيل)

في هذا البند سوف ندرس كيفية إيجاد الإزاحة اذا علمنا سرعة أو تعجيل الجسم المتحرك. ونذكّر هنا ببعض الحقائق الأساسية التي يمكن استنتاجها مما درسناه في الصف الثاني عندما تناولنا بالبحث فصل المشتقة.

1) السرعة تساوي تكامل التعجيل بالنسبة للزمن أي $v = \int a\, dt$

2) الإزاحة تساوي تكامل السرعة بالنسبة للزمن أي $s = \int v\, dt$

مثال 23) :جسم يتحرك على خط مستقيم وكانت سرعته معطاة بالعلاقة $v = \frac{3}{2}\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}}$ حيث v السرعة بالأمتار و t الزمن بالثواني.
وكان بعده بعد مرور أربع ثوان يساوي $20\ m$ جد الإزاحة التي يقطعها الجسم بعد مرور 36 ثانية من بدء الحركة.

الحل :

$$s = \int v\ \ dt = \int \left(\frac{3}{2}\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}}\right) dt \qquad = \int \left(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} + 3t^{\frac{-1}{2}}\right) dt$$

$$= \frac{3}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = t^{\frac{3}{2}} + 6t^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{t^3} + 6\sqrt{t} + c$$

وعندما $t = 4$ تكون $s = 20$

$$20 = \sqrt{4^3} + 6\sqrt{4} + c$$

$$20 = 8 + 12 + c \Rightarrow c = 20 - 20 = 0$$

الأزاحة عند اي زمن $s = \sqrt{t^3} + 6\sqrt{t}$

وعندما $t = 36$ تكون $s = \sqrt{36^3} + 6\sqrt{36}$

$$s = (6)^3 + 6(6)$$

$$s = 216 + 36 = 252 \ m$$

الإزاحة التي يقطعها الجسم بعد مرور36 ثانية من بدء الحركة

مثال 24) :اذا علمت ان السرعة الابتدائية لطائرة عند هبوطها على المدرج تساوي $5 \ km/\ min$ وكانت سرعتها تتناقص بتعجيل تباطئي منتظم قـــــدره $-2 \ km/min^2$. احسب الازاحة التي تقطعها إلى ان تتوقف تمامــــاً عن الحركة.

الحل :

$$v = \int a \, dt = \int -2dt = -2t + c_1$$

وعندما $t = 0$ تكون $v = 5$

$$5 = -2(0) + c_1 \Rightarrow c_1 = 5$$

السرعة عند اي زمن $v = -2t + 5 \ km/min$

$$s = \int v \, dt = \int (-2t + 5) \, dt = -t^2 + 5t + c_2$$

وعندما $t = 0$ تكون $s = 0$ لذلك يكون $0 = 0 + 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$

الأزاحة عند اي زمن $s = -t^2 + 5t \ \ km$

ومن المعروف ان الطائرة سوف تتوقف عندما تصبح سرعتها صفراً أي :

$$v = -2t + 5 = 0$$

$$2t = 5$$

الزمن اللازم تتوقف الطائرة عن الحركة $t = \frac{5}{2} \ min$

$$s = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{-25}{4} + \frac{25}{2}$$

$$= \frac{-25 + 50}{4} = \frac{25}{4} = 6.25 \ km$$

الإزاحة التي تقطعها الطائرة إلى ان تتوقف تماماً عن الحركة.

تمرين (4-2)

1. منحنٍ ميله عند أية نقطة من نقاطه يساوي $3x^2 - 6x - 9$ وله نهاية عظمى محلية قيمتها 15 جد معادلته.
2. منحنٍ ميله عند أية نقطة من نقاطه يساوي $ax^2 - 6x + 9$ حيث $a \in \mathbb{R}$ وله نقطة انقلاب هي $(-1,6)$ جد معادلته.
3. جد معادلة المنحني الذي المشتقة الثانية لمعادلته تساوي $12x - 4$ والمستقيم $2x - y = 6$ يمسه عند النقطة التي احداثيها x يساوي 2.
4. جد معادلة المنحني الذي المشتقة الأولى لمعادلته تساوي $\frac{-2}{x^2}$ ويمر بالنقطة $(1,3)$.
5. تحرك جسم بسرعة منتظمة قدرها $(12t^2 + 2t - 1)\ m/sec$. احسب أزاحته بعد مرور $5\ sec$ من بدء الحركة.
6. جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل ثابت قدره $16\ m/sec^2$ ، وكان بعده عن نقطة بدء الحركة يساوي $180\ m$ بعد مرور $6\ se$ والسرعة عندها كانت تساوي $96\ m/sec$ أحسب :

1) السرعة عندما $t = 3\ se$ 2) الإزاحة عندما $t = 10\ sec$.

5-4 التكامل المحدد

تعريف (3-4) التكامل المحدد :

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ بحيث : $f(x)=F'(x)$
فان :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

حيث $x=a$ يسمى الحد الادنى او الحد الاسفل للتكامل
و $x=b$ يسمى الحد الأعلى أو الحد العلوي للتكامل

مثال 25) :جد قيمة التكامل المحدد الاتي :

$$\int_1^2 2xdx$$

الحل:

$$\int_1^2 2xdx = [x^2]_1^2 = 2^2-1^2=3$$

لاحظ إننا في التكامل المحدد لم نكتب ثابت التكامل c والحل بالطريقة الأتية يوضح سبب ذلك

$$\int_1^2 2xdx = [x^2+c]_1^2 \quad = (2^2+c)-(1^2+c)$$

$$= 4+c-1-c \quad = 3$$

مثال 26) :جد قيمة التكامل المحدد الاتي :

$$\int_0^3 (3x^2+2x)\ dx$$

الحل:

$$\int_0^3 (3x^2+2x)\ dx = [x^3+x^2]_0^3$$

$$= [3^3+3^2]-[0^3+0^2]$$

$$= 27+9-0=36$$

مثال 27) :جد قيمة التكامل المحدد الاتي :

$$\int_{1`}^{3} (2x-3)\,(x^2-3x-6)^2\,dx$$

الحل:

$$\int_{1`}^{3} (2x-3)\,(x^2-3x-6)^2\,dx = \left[\frac{(x^2-3x-6)^3}{3}\right]_1^3$$

مشتقة القوس من الداخل $2\,x-3$

$$= \left(\frac{(3^2-3(3)-6)^3}{3}\right) - \left(\frac{(1^2-3(1)-6)^3}{3}\right)$$

$$= \frac{(-6)^3}{3} - \frac{(-8)^3}{3} = -\frac{216}{3} + \frac{512}{3} = \frac{296}{3}$$

مثال 28) :جد قيمة التكامل المحدد الاتي :

$$\int_{2}^{3} \frac{x^3-1}{x-1}\,dx$$

الحل:

$$\int_{2}^{3} \frac{x^3-1}{x-1}\,dx = \int_{2}^{3} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\,dx$$

$$= \int_{2}^{3} (x^2+x+1)dx \;=\; \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_2^3$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 3\right) - \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2\right)$$

$$= \left(9 + \frac{9}{2} + 3\right) - \left(\frac{8}{3} + 2 + 2\right) = \left(\frac{9}{2} + 12\right) - \left(\frac{8}{3} + 4\right)$$

$$= \left(\frac{33}{2}\right) - \left(\frac{20}{3}\right) \;=\; \left(\frac{99-40}{6}\right) = \frac{59}{6}$$


مثال 29) :جد قيمة الثابت a في التكامل المحدد الاتي.

$$\int_{2}^{a} (x+4)\,dx = 14$$

الحل:

$$\int_{2}^{a} (x+4)\,dx = 14$$

$$\left[\frac{x^2}{2} + 4x\right]_2^a = 14$$

$$\left(\frac{a^2}{2} + 4a\right) - \left(\frac{4}{2} + 8\right) = 14$$

$$\left(\frac{a^2}{2} + 4a\right) - (10) = 14$$

$$\left(\frac{a^2}{2} + 4a\right) = 14 + 10$$

$$\frac{a^2}{2} + 4a = 24$$

$$\frac{a^2}{2} + 4a - 24 = 0$$

$$a^2 + 8a - 48 = 0$$

$$(a+12)(a-4) = 0$$

أما : $(a+12) = 0$

$$\boxed{a = -12}$$

أو : $(a-4) = 0$

$$\boxed{a = 4}$$

1-5-4 خواص التكامل المحدد

اذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل على $[a,b]$ فان :

$$1)\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$ex: \int_2^4 2xdx = [x^2]_2^4 = (16)-(4) = \boxed{12}$$

$$2\int_2^4 xdx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 = 2\left[\left(\frac{16}{2}\right)-\left(\frac{4}{2}\right)\right] = 2[8-2] = \boxed{12}$$

$$2)\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$ex: \int_2^2 2xdx = [x^2]_2^2 = (4)-(4) = 0$$

$$3)\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$ex: \int_2^4 2xdx = [x^2]_2^4 = (16)-(4) = \boxed{12}$$

$$\int_4^2 2xdx = [x^2]_4^2 = (4)-(16) = \boxed{-12}$$

$$4)\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \forall c \in [a,b]$$

$$ex: \int_2^4 2xdx = [x^2]_2^4 = (16)-(4) = \boxed{12}$$

$$\int_2^3 2xdx + \int_3^4 2xdx = [x^2]_2^3 + [x^2]_3^4$$

$$= (9-4)+(16-9) = 5+7 = \boxed{12}$$

$$5)\ \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$ اذا كانت الدالة $f(x)$ دالة فردية

ملاحظة :في الدالة الفردية يكون $f(-x) = -f(x)$

$$ex: \int_{-3}^{3} (x^5 + x^3 + x)dx = \left[\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{+3}$$

$$= \left[\left(\frac{3^6}{6} + \frac{3^4}{4} + \frac{3^2}{2}\right) - \left(\frac{(-3)^6}{6} + \frac{(-3)^4}{4} + \frac{(-3)^2}{2}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{729}{6} + \frac{81}{4} + \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{729}{6} + \frac{81}{4} + \frac{9}{2}\right) = 0$$

$$6)\ \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\ dx$$ اذا كانت الدالة $f(x)$ دالة زوجية

ملاحظة :في الدالة الزوجية يكون $f(-x) = f(x)$

$$ex: \int_{-3}^{3} (x^4 + x^2 + 1)dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x\right]_{-3}^{+3}$$

$$= \left[\left(\frac{3^5}{5} + \frac{3^3}{3} + 3\right) - \left(\frac{(-3)^5}{5} + \frac{(-3)^3}{3} + (-3)\right)\right]$$

$$= \left(\frac{243}{5} + \frac{27}{3} + 3\right) - \left(\frac{-243}{5} - \frac{27}{9} - 3\right)$$

$$= \left(\frac{303}{5}\right) - \left(\frac{-303}{5}\right) = \boxed{\frac{606}{5}}$$

$$2\int_{0}^{3} (x^4 + x^2 + 1)dx) \ = 2\left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x\right]_{0}^{+3}$$

$$= 2\left[\left(\frac{3^5}{5} + \frac{3^3}{3} + 3\right) - (0)\right]$$

$$= 2\left(\frac{243}{5} + \frac{27}{3} + 3\right) = 2\left(\frac{303}{5}\right) = \boxed{\frac{606}{5}}$$

$$7)\ \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)\ \ dx$$

$$8)\ \int_a^b f(x)dx \ \geq 0 \qquad f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [a,b]$$ اذا كانت

$$9)\ \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \qquad f(x) \geq g(x) \ \ \forall x \in [a,b]$$ اذا كانت

مثال 30) :اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة [2,6] اثبت ان

$$\int_2^3 f(x)dx + \int_3^6 f(x)dx + \int_6^2 f(x)dx = 0$$

الحل: باستخدام الخاصيتين (3) و (4) يمكننا التوصل إلى ان

$$\int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^6 f(x)dx = \int_2^6 f(x)dx \quad , \quad \int_6^2 f(x)dx = -\int_2^6 f(x)dx$$

$$L.H.S = \int_2^3 f(x)dx + \int_3^6 f(x)dx + \int_6^2 f(x)dx$$

$$= \int_2^6 f(x)dx + \left[-\int_2^6 f(x)dx\right] = 0 = R.H.S$$

مثال 31) : أذا علمت ان

$$\int_{-1}^{7} f(x)dx = 8$$

جد قيمة التكامل الاتي : $\int_{-1}^{7} [4 + 3f(x)]dx$

الحل:

$$\int_{-1}^{7} [4 + 3f(x)]dx = \int_{-1}^{7} 4dx \ + 3\int_{-1}^{7} f(x)dx$$

$$= [4x]_{-1}^{7} + 3(8)$$

$$= [(28) - (-4)] + 24$$

$$= 32 + 24 = 56$$

مثال 32) :أذا كان :

$$\int_{1}^{5} f(x)dx = -4 \ , \int_{1}^{5} [3f(x) + 2g(x)]\, dx = 6$$

جد قيمة التكامل الاتي : $\int_{1}^{5} g(x)dx$

الحل:

$$\int_{1}^{5} [3f(x) + 2g(x)]\, dx = 6$$

$$\int_{1}^{5} 3f(x)dx + \int_{1}^{5} 2g(x)dx = 6$$

$$3\int_{1}^{5} f(x)dx + 2\int_{1}^{5} g(x)dx = 6$$

$$3(-4) + 2\int_{1}^{5} g(x)dx = 6$$

$$-12 + 2\int_{1}^{5} g(x)dx = 6$$

$$2\int_{1}^{5} g(x)dx = 18 \Rightarrow \int_{1}^{5} g(x)dx = 9$$

تمرين (3-4)

1. جد قيمة التكاملات المحددة الأتية:

$$a)\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx \qquad b)\int_0^1 \frac{3x^2+4}{(x^3+4x+1)^2}\,dx$$

$$c)\int_8^{125} \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx \qquad d)\int_1^{\sqrt{57}} \sqrt[3]{x^5+7x^3}\,dx$$

2. أثبت صحة المتطابقات الأتية:

$$a)\int_1^4 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{20}{3}$$

$$b)\int_0^3 \sqrt[3]{(3x-1)^2}\,dx=\frac{33}{5}$$

$$c)\int_0^2 \sqrt{4x+1}\,dx=\frac{13}{3}$$

3. جد قيمة $a \in \mathbb{R}$ اذا علمت ان:

$$\int_0^a (2x-4)dx = -\int_{-1}^{2}(x-1)^2dx$$

4. اذا علمت ان للدالة $f(x)=x^2+2x+a$ حيث $a\in\mathbb{R}$ نهاية صغرى محلية قيمتها (-5)
جد قيمة التكامل الاتي :

$$\int_1^3 f(x)\,dx$$

5. أذا علمت ان:

$$\int_3^6 f(x)dx=2 \quad , \int_3^6 g(x)dx=7$$

جد كلاً مما يأتي :

$$a)\int_{3}^{6}[f(x)+g(x)]dx$$

$$b)\int_{3}^{6}[2f(x)-4g(x)]dx$$

$$c)\int_{3}^{6}[3f(x)+2g(x)]dx$$

6. اذا علمت ان:

$$\int_{0}^{a}3x\sqrt{x^2+16}\,dx=61$$

جد قيمة $a\in\mathbb{R}$.

6-4 إيجاد مساحة المنطقة المستوية باستخدام التكامل المحدد

1-6-4 مساحة المنطقة المستوية المحددة بين منحني الدالة والمحور x

يمكننا حساب مساحة المنطقة المستوية التي يحددها المستقيمان $x=a, x=b$ مع منحني الدالة $y=f(x)$ المستمرة على الفترة $[a,b]$ كما يأتي :

1) اذا كانت $f(x)>0$ فان المساحة A تساوي:

$$A=\int_{a}^{b}f(x)dx$$

2) اذا كانت $f(x)<0$ فان المساحة A تساوي:

$$A=-\int_{a}^{b}f(x)dx$$

وحيث ان المساحة كمية موجبة دائماً فأننا نأخذ القيمة المطلقة لناتج التكامل.

وينبغي اتباع الخطوات الأتية لإيجاد المساحة :

1) إيجاد نقاط تقاطع الدالة مع المحور x بجعل $f(x)=0$ للحصول على فترات جزئية من الفترة $[a,b]$

2) نجري عملية التكامل لكل فترة جزئية على حدة ثم نجمع القيم المطلقة للتكاملات للحصول على المساحة.

مثال 33) :جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^2 - 4$ والمحور x.

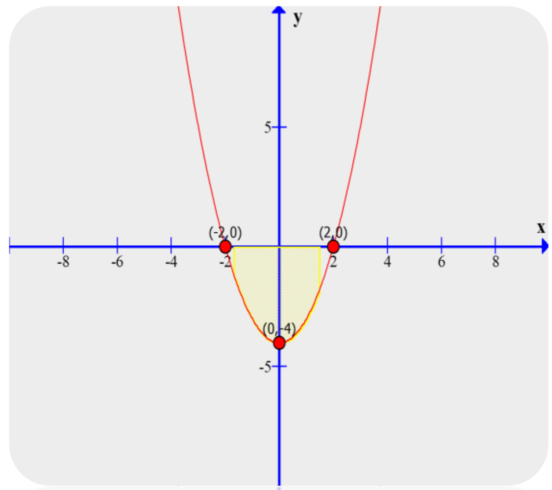
الحل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$$

$$(x-2)(x+2) = 0$$

$$\therefore \quad x = 2 \;, \quad x = -2$$

أي ان فترة التكامل هي $[-2,2]$ وعليه فان المساحة يمكن احتسابها كالاتي :



الشكل 4-3

$$\int_{-2}^{2}(x^2-4)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - 8\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} + 8\right)$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 8\right) - \left(\frac{-8}{3} + 8\right)$$

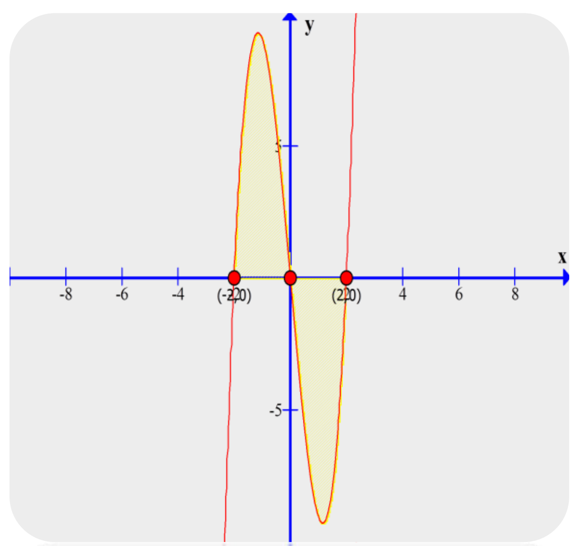
$$= \left(\frac{8-24}{3}\right) - \left(\frac{-8+24}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{-16}{3}\right) - \left(\frac{16}{3}\right) = \frac{-32}{3}$$

$$\therefore \ A = \left|\frac{-32}{3}\right| = \frac{32}{3}\ (unit)^2$$

مثال 34) :جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = 3x^3 - 12x$ والمحور x .

الحل:



الشكل 4-4

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^3 - 12x = 0$$

$$3x(\,x^2 - 4) = 0 \Rightarrow 3x(x-2)(x+2) = 0$$

$$\therefore \quad x = 0 \;, \quad x = \; 2, x = -2$$

أي ان فترتي التكامل هي $[-2,0], [0,2]$

وعلية فان المساحة يمكن احتسابها كالاتي :

$$A_1 = \int_{-2}^{0}(3x^3 - 12x)dx = \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{12x^2}{2}\right]_{-2}^{0}$$

$$A_1 = \left[\frac{3x^4}{4} - 6x^2 \right]_{-2}^{0} = (0-0) - \left(\frac{3\times 16}{4} - 6\times 4\right)$$
$$A_1 = (0) - (12-24) = 12$$
$$A_2 = \int_0^2 (3x^3 - 12x)dx = \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{12x^2}{2} \right]_0^2 = \left[\frac{3x^4}{4} - 6x^2 \right]_0^2$$
$$A_2 = \left(\frac{3\times 16}{4} - 6\times 4\right) - (0-0) = (12-24) - 0 = -12$$
$$\because \mathrm{A} = |A_1| + |A_2| = |12| + |-12| = 12 + 12 = 24\ (unit)^2$$

مثال 35) :جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ والمحور x والمستقيمين $x = -2\ ,\ x = 2$.

الحل :

ان العبارة (المستقيمان $x = -2\ ,\ x = 2$) تكافيء العبارة (الفترة المغلقة $[-2,2]$).

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0$$
$$x(\,x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x(x-2)(x+2) = 0$$
$$\therefore\ x = 0\ ,\ \ x = 2, x = -2$$

لاحظ ان: $x = 0 \in [-2,2]\ , x = 2 \in [-2,2]\ , x = -2 \in [-2,2]$

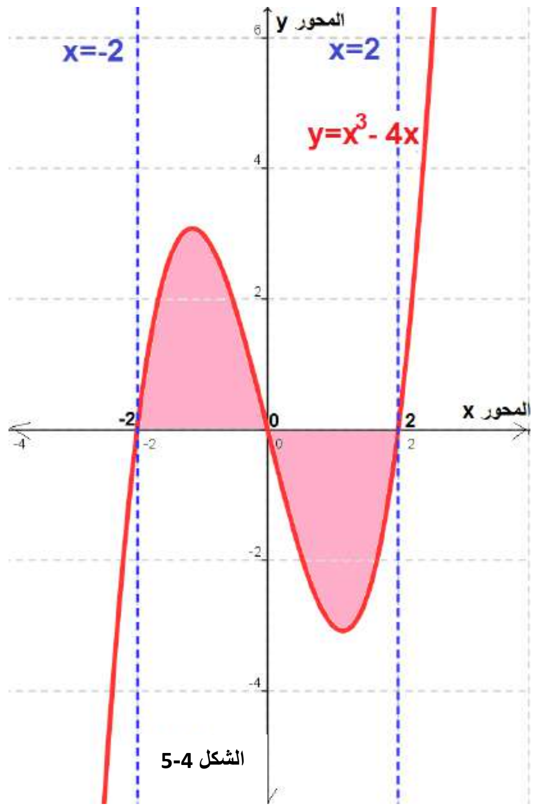
أي ان فترتي التكامل هي $[-2,0], [0,2]$

وعليه فان المساحة يمكن احتسابها كالاتي :

$$A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2} \right]_{-2}^{0}$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^{0} = (0-0) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 2\times(-2)^2\right)$$
$$= (0) - (4-8) = 4$$
$$A_2 = \int_0^2 (x^3 - 4x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2} \right]_0^2$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2 = \left(\frac{2^4}{4} - 2\times 2^2\right) - (0-0)$$
$$= (4-8) - 0 = -4$$

$$\because\ A = |A_1| + |A_2|$$
$$\therefore\ A = |4| + |-4| = 4 + 4 = 8(unit)^2$$

والشكل الاتي يوضح لك بالتفصيل المساحة المحددة المطلوبة .



الشكل 4-5

4-6-2 مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحني دالتين :

يمكننا حساب مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحني الدالتين $f(x), g(x)$ المستمرتين على الفترة المغلقة $[a, b]$ والمستقيمين $x = a\ ,\ x = b$ كما يأتي :

1) نجد نقاط التقاطع بين المنحنيين عن طريق جعل $f(x) = g(x)$ وتبسيط النتيجة للحصول على فترات جزئية من الفترة $[a, b]$

2) نجري عملية التكامل لكل فترة جزئية على حدة.

3) نجمع القيم المطلقة للتكاملات للحصول على المساحة.

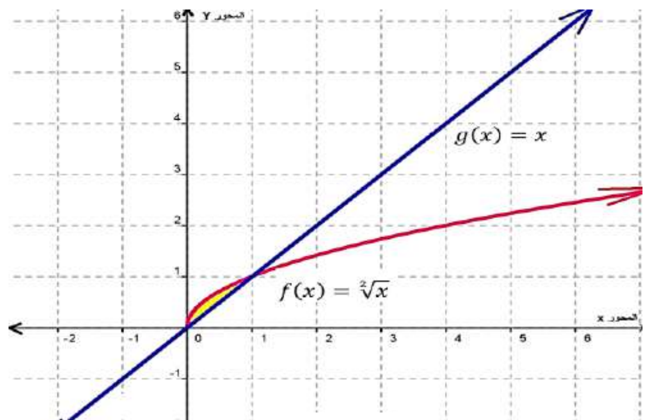
مثال 36) :جد المساحة المحددة بين منحني الدالتين $f(x) = \sqrt{x}\,, g(x) = x$

الحل:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x} = x$$

$$x = x^2 \Rightarrow x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0 \quad \Rightarrow x = 0\ , \quad x = 1$$



الشكل4-6

أي ان فترة التكامل هي   [0,1]   وعليه فان المساحة يمكن احتسابها كالاتي :

$$A = \int_0^1 [\sqrt{x} - x]\, dx = \int_0^1 \left[x^{\frac{1}{2}} - x\right] dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) - (0) = \frac{1}{6}(unit)^2$$

مثال 37) : جد المساحة المحددة بين منحني الدالتين $f(x) = x^3$ و $g(x) = x$.

الحل:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 = x$$

$$x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0$$

$$x(1-x)(1+x) = 0 \Rightarrow \ x = 0\ , \quad x = 1, x = -1$$

أي ان فترتي التكامل هي $[-1,0],[0,1]$ وعليه فان المساحة يمكن احتسابها كالاتي :

$$A_1 = \int_{-1}^{0}(x - x^3)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} =$$

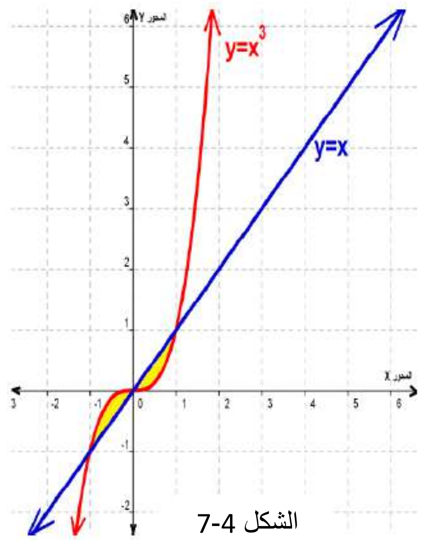
$$= (0-0) - \left(\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^4}{4}\right)$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1}(x - x^3)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}$$

$$= \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4}\right) - (0-0)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{1}{4}$$



الشكل 7-4

$$\because \mathrm{A} = |A_1| + |A_2|$$

$$\mathrm{A} = \left|\frac{-1}{4}\right| + \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}(unit)^2$$

7-4 التطبيق الفيزياوي للتكامل المحدد (الإزاحة - المسافة)

من المعلوم ان المسافة كمية غير اتجاهية وتقترن بعدد حقيقي موجب أما الإزاحة والسرعة والتعجيل فان كلاً منها كمية اتجاهية ولذلك فان :

1) المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي :

$$d = \left|\int_{t_1}^{t_2} v(t)\ dt\right|$$

حيث d تمثل المسافة ، $v(t)$ تمثل السرعة.

2) الإزاحة التي يقطعها الجسم في الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\ dt$$

حيث s تمثل الإزاحة ، $v(t)$ تمثل السرعة.

مثال 38) :جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = 4t - 12$ جد :

1) المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية $[1,5]$

2) الإزاحة التي قطعها الجسم في الفترة الزمنية $[1,5]$

3) المسافة التي قطعها الجسم خلال الثانية الرابعة من حركته

4) بعد الجسم بعد مضي (10) ثواني من بدء حركته.

الحل:
$$4t - 12 = 0 \Rightarrow 4t = 12$$
$$t = 3 \in [1,5] \Rightarrow [1,3], [3,5]$$

$$1)\ d = \left|\int v(t)\,dt\right|$$
$$= \left|\int_1^3 (4t-12)\ dt\right| + \left|\int_3^5 (4t-12)\ dt\right|$$
$$= \left|[2t^2 - 12t]_1^3\right| + \left|[2t^2 - 12t]_3^5\right|$$
$$= |(2\times 9 - 12\times 3) - (2\times 1 - 12\times 1)| +$$
$$|(2\times 25 - 12\times 5) - (2\times 9 - 12\times 3)|$$
$$= |(18-36) - (2-12\,)| + |(50-60) - (18-36)|$$
$$= |(-18\,) + 10| + |(-10\,) + 18| = |-8| + |8| = 8 + 8 = 16\ m$$

$$2)\ s = \int_1^5 (4t-12)\ dt = [2t^2 - 12t]_1^5$$
$$= (50-60) - (2-12) = (-10) + 10 = 0\ m$$

$$3)\ d = \left|\int_3^4 (4t-12)\ dt\right| = \left|[2t^2 - 12t]_3^4\right|$$
$$= |(32-48) - (18-36)| = |(-16) + 18| = 2\ m$$

$$4)\ s = \int_0^{10} (4t-12)\ dt$$
$$= [2t^2 - 12t]_0^{10} = (200-120) - (0) = 80\ m$$

ملاحظة : اذا لم يغير الجسم اتجاهه أثناء حركته ضمن الفترة المحددة فان المسافة تساوي القيمة المطلقة لقيمة الإزاحة.

مثال 39) : جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = 2t + 12$ جد :

1) المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية [1,3].

2) الإزاحة التي قطعها الجسم في الفترة الزمنية[1,3].

الحل :

$$2t + 12 = 0$$

$$2t = -12$$

$$\mathrm{t} = -6$$

وحيث ان الزمن لا يمكن ان يكون بالسالب لذلك فان الجسم لم يغير اتجاهه أثناء حركته لذلك :

$$d = |s| = \left| \int_1^3 (2t + 12)\, dt \right|$$

$$= \left| \left[\frac{2t^2}{2} + 12t \right]_1^3 \right|$$

$$= |[t^2 + 12t]_1^3|$$

$$= |(9 + 36) - (1 + 12)|$$

$$= |45 - 13| = 32m$$

تمرين (4-4)

1. جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ والمحور X على الفترة $[2,3]$.
2. جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = f(x) = x^4 - x^2$ والمحورXعلى الفترة $[-1,1]$.
3. جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = f(x) = x\sqrt{x^2 + 9}$ والمحور X على الفترة$[0,4]$.
4. جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$ والمحور X .
5. جد المساحة المحددة بين منحني الدالة $f(x) = x^2$ والمستقيم $g(x) = -x$ والمستقيمين : $x = 1 , x = 3$.
6. جد المساحة المحددة بين منحني الدالة $f(x) = x^4$ والمستقيم $g(x) = x$.
7. جد المساحة المحددة بين منحني الدالتين $f(x) = x^2$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ على الفترة $[0,2]$.
8. تحرك جسم على خط مستقيم بتعجيل قدره $12\ cm/sec^2$ فاذا كانت سرعته تساوي $24\ cm/\sec$ بعد مرور $3\ sec$ من بدء الحركة إحسب:
   a) المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية $[1,3]$
   b) الزمن اللازم لعودة الجسم إلى موضعه الأول الذي بدأ الحركة منه.
9. جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4 + 2)\ cm/sec^2$ وكانت سرعته عندما $t = 4$ تساوي $50\ cm/sec$ إحسب :
   a) سرعة الجسم عند أية لحظة
   b) المسافة التي يقطعها الجسم في الفترة الزمنية $[3,7]$.
   c) المسافة المقطوعة خلال الثانية الرابعة من الحركة.
   d) بعد الجسم بعد مرور $10\ sec$ من بدء الحركة.
10. جسم يتحرك على خط مستقيم وكانت سرعته معطاة بالعلاقة $v = 3t^2 + 6t + 3$ جد المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية $[2,4]$ ثم جد تعجيل الجسم بعد مرور $3\ sec$ من بدء الحركة.

الفصل الخامس

الهندسة الفراغية Spherical geometry

الاهداف السلوكية:

ينبغي للطالب في نهاية هذا الفصل ان يكون قادراً على ان :-

1. يتعرف على مفهوم الهندسة الفراغية واستعمالاتها اليومية.
2. يستوعب التعاريف والمصطلحات المستخدمة في علم الهندسة الفراغية ويستطيع التمييز بينها.
3. يتعرف على مفهوم الزاوية الزوجية واسلوب التعبير عنها هندسياً.
4. يتعرف على مفهوم تعامد المستويات والمبرهنات الخاصة به.
5. يتعرف على مفهوم الاسقاط العمودي على المستوي والمبرهنات الخاصة به.

المحتوى العلمي

1-5 تمهيد

2-5 الزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة

3-5 المبرهنة السابعة ونتيجتها

4-5 المبرهنة الثامنة

5-5 المبرهنة التاسعة ونتيجتها

6-5 الإسقاط العمودي على المستوي

الفصل الخامس

الهندسة الفراغية Spherical geometry

1-5 تمهيد

تلعب الهندسة في حياتنا اليومية دوراً فعّالاً حيث استخدمت قديماً في معرفة مواقيت الصلاة والأهلـَة وفي تصميم القصور والبنايات وشق الأنهار والقنوات وفي تسيير أمور الحياة اليومية ، ولا زالت حتى يومنا هذا تلعب دوراً بارزاً في كثير من مواقف الحياة المعاصرة.

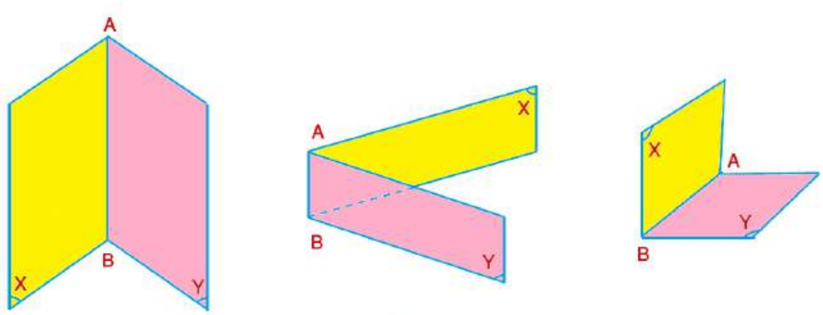
في الرياضيات ، الهندسة الفراغية أو الهندسة المجسمة هي الهندسة الإقليدية مطبقة في فضاء إقليدي ثلاثي الأبعاد مشابه للفضاء الذي نعيش فيه. وتهتم الهندسة الفراغية بدراسة الأشكال الهندسية ثلاثية الأبعاد مثل المكعب ، الموشور ، المخروط ، الهرم ، الأسطوانة ، الكرة ، تقاطع المستويات و المستقيمات .كما تهتم الهندسة الفراغية بدراسة أحجام و مساحات أسطح هذه الأجسام وعلاقة بعضها ببعض وفق قوانين و نظريات مبرهنة ثابتة.

كنا قد تعلمنا في الصف الثاني ان كلاً من المستقيم والمستوي مجموعة غير منتهية من النقاط ، وان كل نقطتين تعينان مستقيماً واحداً فقط لا يوجد غيرهُ (نسميه وحيداً) ، وان كل ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة تعين مستوياً واحداً فقط ، كما ان كل اربع نقاط لا تقع في مستو واحد تعيّن فضاءً.
وهذا يعني ان المستقيم يحتوي على نقطتين على اقل تقدير ، والمستوي يحتوي على ثلاث نقاط على اقل تقدير ، والفضاء على اربع نقاط على اقل تقدير ليست جميعها في مستو واحد.
كما تعرفنا في الصف الثاني على العلاقة بين المستقيمات والمستويات وتوصلنا إلى برهان بعض المبرهنات التي يمكننا الاعتماد عليها في برهان المزيد من المبرهنات في فصلنا هذا. ولكي تتمكن عزيزي الطالب من التواصل مع تلك المبرهنات ندعوك لمراجعة ما درسته في الصف الثاني بهدف استيعاب العلاقات الجديدة بين المستقيمات والمستويات التي سوف ندرسها هذه السنة.

2-5 الزاوية الزوجية وتعامد المستويات

تعريف 5-1 الزاوية الزوجية : هي اتحاد نصفي مستويين لهما حافة مشتركة

تسمى الحافة المشتركة بـ (حرف الزاوية الزوجية) ويسمى كل من نصفي المستويين بـ (وجه الزاوية الزوجيه) . لاحظ الشكل 5-1 ادناه :

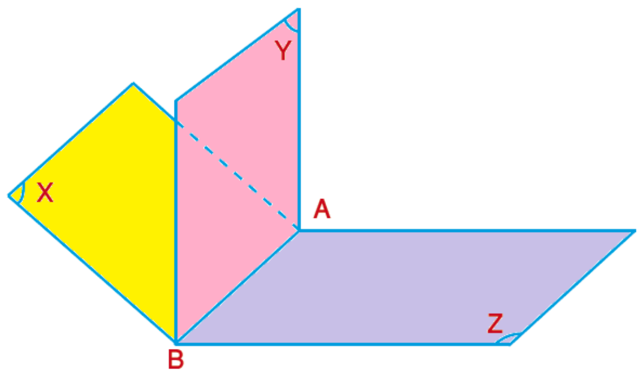


الشكل 5-1

حيث $\overleftrightarrow{AB}$ هو حرف الزاوية الزوجية ، $(X),(Y)$ هما وجهاها ، ونعبر عن الزاوية الزوجية بالتعبير: $(X)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)$ وقد يعبر عنها بحرف الزاوية الزوجية ان لم يكن مشتركا مع زاوية زوجية اخرى . مثلاً [لاحظ الشكل 2-5 ادناه] وفيه الزاويا الزوجية الاتية :-

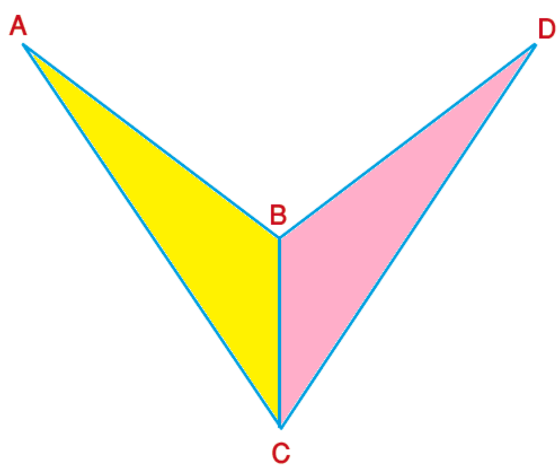
$$(X)-\overleftrightarrow{AB}-(Z) \quad , \quad (X)-\overleftrightarrow{AB}-(Y) \quad ,(Y)-\overleftrightarrow{AB}-(Z)$$

ولا يجوز لنا ان نكتب الزاوية الزوجية بالصيغة $\overleftrightarrow{AB}$ لأن الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ مشترك في اكثر من زاوية زوجية .



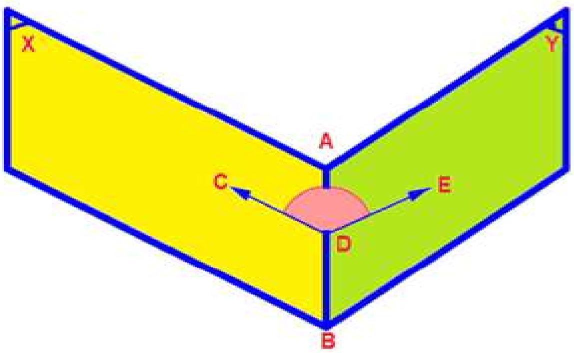
الشكل 2-5

ملاحظة : عندما يكون لدينا اربع نقاط ليست في مستو واحد ، نكتب الزاوية الزوجية بالصيغة $A-\overleftrightarrow{BC}-D$ او الزاوية الزوجية بين المستويين $(ABC),(DBC)$ كما فـــــي الشكل 3-5 ادناه:-



الشكل 3-5

وتقاس الزاوية الزوجية كالاتي :- نأخذ نقطة D على الحافة المشتركة $\overleftrightarrow{A}$ ومنها نرسم العمود $\overrightarrow{DC}$ في (X) و العمود $\overrightarrow{DE}$ في (Y) على الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ فيكون قياس الزاوية الزوجية بين المستويين هو قياس الزاوية CDE وتسمى الزاوية CDE الزاويـــــة المستوية العائدة للزاوية الزوجيـــة .



الشكل 4-5

لاحظ الشكل 5-4 المجاور :

بعبارة اخرى لدينا الزاوية الزوجية : $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$ ولدينا

$$(\overrightarrow{DC}) \subseteq (X), (\overrightarrow{DE}) \subseteq (Y) \;\; \overrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$$

$\measuredangle CDE$ هي الزاوية العائدة للزاوية الزوجية $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

تعريف 5-2 الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية: هي الزاوية التي ضلعاها عموديان على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في احد وجهي الزاوية الزوجية.

ومن تعريف الزاويتين (المستوية العائدة) و(الزوجية) يمكننا استنتاج الاتي :-

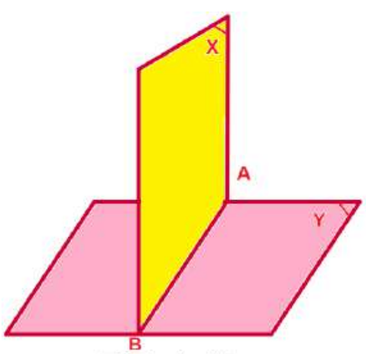
1) قياس زاوية عائدة لزاوية زوجية ثابت.
2) قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية المستوية العائدة لها وبالعكس.

استنتاج

اذا كانت الزاوية الزوجية قائمة فان المستويين متعامدان وبالعكس.

لاحظ الشكل 5-5 المجاور قياس الزاوية الزوجية $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$ يساوي $90°$ لذلك يكون :-

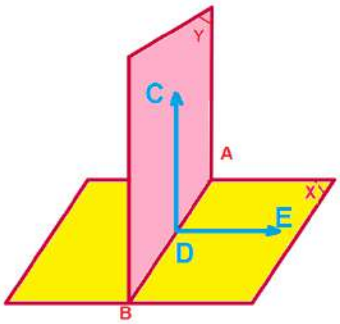
$$(X) \perp (Y)$$



الشكل 5-5

3-5 المبرهنة السابعة ونتيجتها

مبرهنة7 : اذا تعامد مستويان فان المستقيم المرسوم في احدهما عمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوي الأخر.



الشكل 5-6

المعطيات: $(X) \perp (Y),\ (X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD} \subseteq (Y), \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (من نقطة B)

المطلوب إثباته:- $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان : في المستوي (X) نرسم $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$

(في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيــه من نقطة معلومة)

$\overleftrightarrow{CD} \subseteq (Y), \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (معطى)

أذن $\sphericalangle CDE$ هي الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

(تعريف الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية)

أذن $m\sphericalangle CDE = 90°$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية المستوية العائدة لها وبالعكس).

أي ان: $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DE}$

(اذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين يساوي $90°$ فان المستقيمين متعامدان وبالعكس)

وهذا يعني ان $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما).

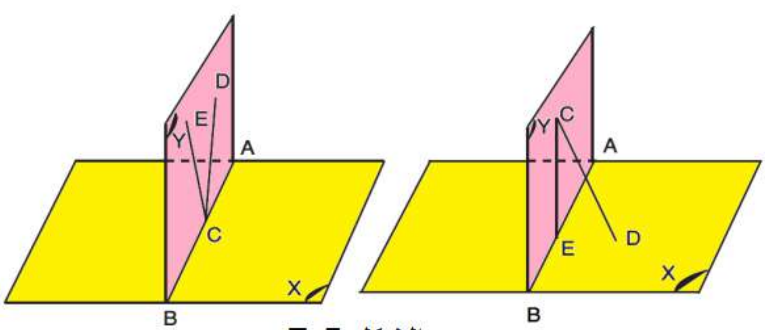
و. هـ. م

نتيجة مبرهنة7: اذا تعامد مستويان فان المستقيم المرسوم من نقطة في احدهما عمودياً على المستوي الآخر يكون محتوى فيه

المعطيات : $(Y) \perp (X)$ ، $C \in (Y)$ ، $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

المطلوب أثباته:- $\overleftrightarrow{CD} \subseteq (Y)$

البرهان : (نتركه للطالب)



الشكل 5-7

4-5 المبرهنة الثامنة

مبرهنة8: كل مستوٍ مار بمستقيم عمودي على مستوٍ آخر يكون عمودياً على ذلك المستوي.
أو يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر.

المعطيات :- $\overleftrightarrow{CD} \perp (X),\ \overleftrightarrow{CD} \subseteq (Y)$

المطلوب إثباته :- $(Y) \perp (X)$

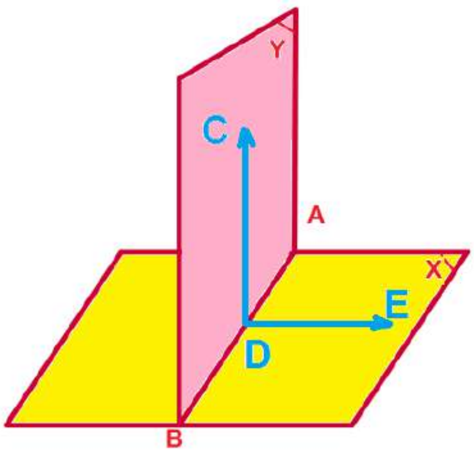
البرهان :- ليكن $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

(يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$D \in \overleftrightarrow{AB}$ (مستقيم التقاطع يحوي النقاط المشتركة)

في(X) نرسم $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$

(في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم فيه من نقطة معلومة)



الشكل 5-8

$\because \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}$

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من أثره).

$\because \overleftrightarrow{CD} \subseteq (Y)$ (معطى)

$\sphericalangle CDE$ هي الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

(تعريف الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية)

$\therefore m\sphericalangle CDE = 90°$ (لأن $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DE}$).

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y) = 90°$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية المستوية العائدة لها وبالعكس).

$\therefore (X) \perp (Y)$ (اذا كان قياس الزاوية الزوجية يساوي$90°$ فان المستويين متعامدان وبالعكس)

و. هـ. م

5-5 المبرهنة التاسعة ونتيجتها

مبرهنة 9 : من مستقيم غير عمودي على مستوٍ معلوم يوجد مستوٍ وحيد عمودي على المستوي المعلوم

المعطيات :- $\overleftrightarrow{AB}$ مستقيم غير عمودي على المستوي(X)

المطلوب إثباته :- إيجاد مستوي وحيد يحتوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على المستوي(X)

البرهان :- من نقطة A نرسم$(X) \perp \overleftrightarrow{AC}$ (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة لا تنتمي اليه).

$\because$ $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$ متقاطعان

$\therefore$ يوجد مستوٍ وحيد مثل (Y) يحتويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما)

$\therefore$ $(X) \perp (Y)$ (مبرهنة 8)

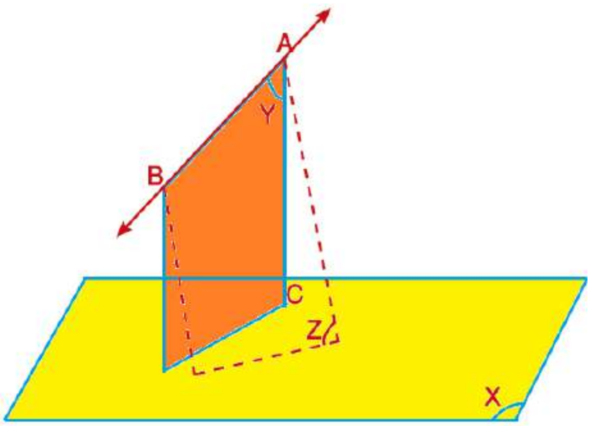
ولبرهنة الوحدانية :-

ليكن (Z) مستوٍ آخر يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على(X)

$\because$ $(X) \perp \overleftrightarrow{AC}$ (بالبرهان).

$\therefore$ $(Z) \subseteq \overleftrightarrow{AC}$(نتيجة مبرهنة 7)

$\therefore$ $(Z) = (Y)$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما).



الشكل 9-5

و. هـ. م

نتيجة مبرهنة 9 :اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فان مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث.

المعطيات :- $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

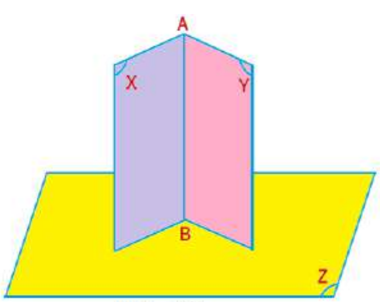
$(X), (Y) \perp (Z)$

المطلوب إثباته :- $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

البرهان :-

ان لم يكن $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$ لما وجد اكثر من مستوي يحوي $\overleftrightarrow{A}$ وعمودي على (Z) (مبرهنة9)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

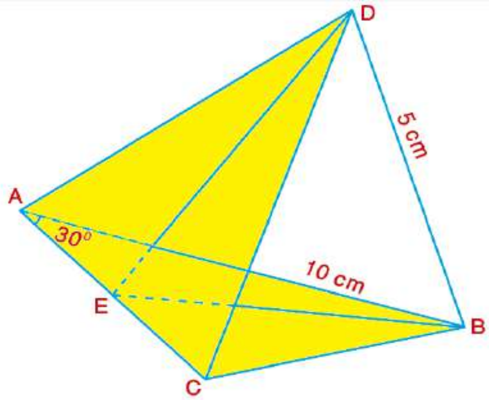


الشكل 10-5

و. هـ. م

تمرين للطالب: (توجد طرق أخرى لبرهان هذه النتيجة ، اكتب احدها).

مثال 1) :



الشكل 5-11

في الشكل المجاور ΔABC فيه :

$\overline{BD} \perp (ABC)\ m\sphericalangle CAB = 30°$

$\overline{BD} = 5\ cm, \overline{AB} = 10cm$

جد قياس الزاوية الزوجية $(\mathrm{D}) - \overline{AC} - (B)$

المعطيات : في ΔABC :-

$\overline{BD} \perp (ABC)$

$m\sphericalangle CAB = 30°$

$\overline{BD} = 5\ cm, \overline{AB} = 10cm$

المطلوب إثباته:- إيجاد قياس الزاوية الزوجية

$\mathrm{D} - \overline{AC} - B$

الحل والبرهان :-

في المستوي (ABC) نرسم $\overline{AC} \perp \overline{BE}$ في نقطة E (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم اخر من نقطة معلومة).

$\because \overline{BD} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore \overline{DE} \perp \overline{AC}$ (المبرهنة 6 مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

وحيث ان $\sphericalangle DEB$ هي الزاوية المستوية العائدة إلى الزاوية الزوجية $(\mathrm{D}) - \overline{AC} - (B)$ (تعريف الزاوية العائدة).

$\therefore \overline{DB} \perp \overline{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من أثره).

$\therefore \Delta DBE$ قائم الزاوية في B.

في ΔBEA القائم الزاوية في E

$$\sin 30° = \frac{\overline{BE}}{\overline{BA}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{10}$$

$$\overline{BE} = 5\ cm$$

في ΔDBE القائم الزاوية في B

$$\tan \sphericalangle BED = \frac{5}{5} = 1$$

$$\therefore m\sphericalangle BED = 45°$$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية$(\mathrm{D}) - \overline{AC} - (B)$ يساوي $45°$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية المستوية العائدة لها وبالعكس). و. هـ. م

مثال (2) :

ليكن ABC مثلثاً وليكن $\overline{BE} \perp \overline{CA}$, $\overline{BD} \perp \overline{CF}$, $\overline{AF} \perp (ABC)$:

اثبت ان : $1)\ \overline{BE} \perp (CAF)$, $2)\ \overline{ED} \perp \overline{CF}$

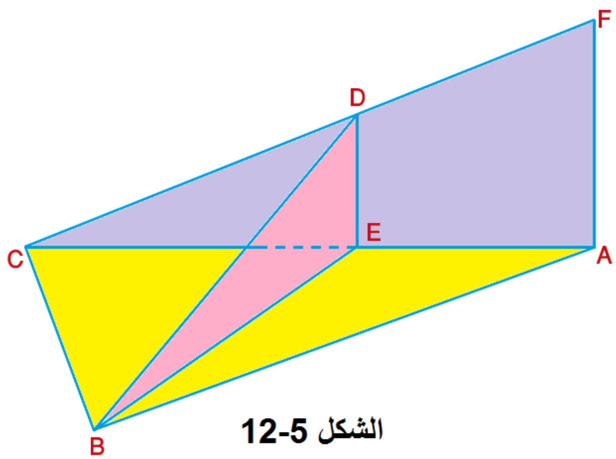
المعطيات:-

$$\overline{AF} \perp (ABC), \overline{BD} \perp \overline{CF}, \overline{BE} \perp \overline{CA}$$

المطلوب إثباته :-

$1)\ \overline{BE} \perp (CAF)$, $2)\ \overline{ED} \perp \overline{CF}$

البرهان:-



الشكل 12-5

$\because$ $\overline{AF} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore$ $(CAF) \perp (ABC)$

(مبرهنة 8 :يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الأخر)

$\because$ $\overline{BE} \perp \overline{CA}$ (معطى)

$\therefore$ $\overline{BE} \perp (CAF)$

(مبرهنة7 : اذا تعامد مستويان فان المستقيم المرسوم في احدهما عمودياً على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوي الأخر)

و. هـ. م 1

$\because$ $\overline{BD} \perp \overline{CF}$ (معطى)

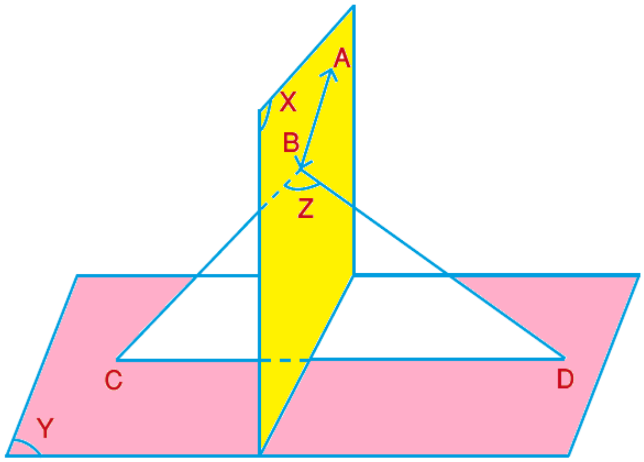
$\therefore$ $\overline{ED} \perp \overline{CF}$ (نتيجة مبرهنة الأعمدة الثلاثة) و. هـ. م 2

مثال (3) :

$(X), (Y)$ مستويان متعامدان ، $\overleftrightarrow{AB} \subseteq (X)$ ، $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (Y) في C, D على الترتيب برهن ان $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$.

المعطيات : $(X) \perp (Y)$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subseteq (X)$ ، $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (Y) في C, D على الترتيب.

المطلوب إثباته :- $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$



الشكل 5-13

البرهان :- ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$(لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما).

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\because (X) \supseteq \overleftrightarrow{AB}$ (معطى)

$\therefore (X) \perp (Z)$

(يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمود على الأخر)

$\because (X) \perp (Y)$ (معطى)

ولما كان $\overleftrightarrow{CD} = (Z) \cap (Y)$ (لأنه محتوى في كليهما)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

(اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فان مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث)

و. هـ. م

تمرين (5-1)

1. برهن ان مستوي الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية يكون عمودياً على حرفها.
2. برهن انه اذا وازى مستقيم مستوياً وكان عمودياً على مستوٍ اخر فان المستويين متعامدان.
3. برهن ان المستوي العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عموداً على الأخر أيضاً.
4. A, B, C, D اربع نقاط ليست في مستوٍ واحد بحيث $\overline{AB} = \overline{AC}$ ، $E \in \overline{BC}$ فاذا كانت $\measuredangle AED$ عائدة الى الزاوية الزوجية $(A) - \overline{BC} - (D)$ برهن ان $\overline{CD} = \overline{BD}$.
5. برهن انه اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً معلوماً وكانا عموديان على مستويين متقاطعين فان مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عمودياً على المستوي المعلوم.
6. دائرة قطرها $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ عمود على مستويها، D نقطة تنتمي للدائرة. برهن ان:

$$(CDA) \perp (CDB)$$

6-5 الإسقاط العمودي على المستوي The Orthogonal Projection On A Plane

تعاريف أساسية

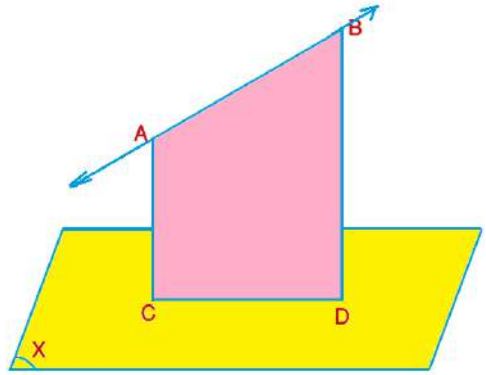
تعريف5-3 مسقط نقطة على مستوٍ: هو اثر العمود المرسوم من تلك النقطة على المستوي.

تعريف 5-4 مسقط مجموعة من النقاط على مستوٍ:

لتكن L مجموعة من النقاط في الفراغ فان مسقطها هو مجموعة كل اثار الاعمدة المرسومة من نقاطه على المستوي

تعريف5-5 مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم :

هوقطعة المستقيم المحددة باثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة المستقيمة على المستوي المعلوم



الشكل 5-14

في الشكل (6-5) المجاور ليكن $\overleftrightarrow{A}$ غير عمودي على (X) وليكن :-

$\overline{AC} \perp (X) \Leftarrow$ مسقط النقطة A على (X) هو C

$\overline{BD} \perp (X) \Leftarrow$ مسقط النقطة B على (X) هو D

اذن مسقط $\overline{AB}$ على (X) هو $\overline{CD}$

ملاحظة :-

اذا كان $\overline{AB}//(X)$ فان $\overline{AB}//\overline{CD}$

تعريف 5-6 المستقيم المائل على مستوي : هو المستقيم غير العمودي على المستوي وقاطع له

تعريف 5-7 زاوية الميل : هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي

في الشكل (5-7) المجاور : ليكن $\overleftrightarrow{AB}$ مستقيماً

مائلاً على (X) ، في النقطة B وليكن :

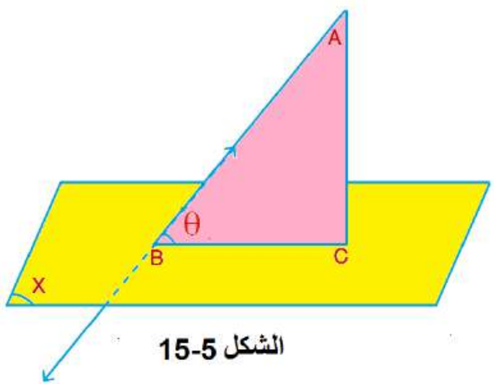
$\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ في النقطة C

$\therefore$ C مسقط A على (X) حيث $A \notin (X)$

كذلك B هي مسقط نفسها على (X)

حيث $B \in (X)$

$\therefore$ $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)



الشكل 5-15

أي ان : $0 < \theta < 90°, \theta \in (0°, 90°)$

استنتاج طول مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ= طول المائل × جيب تمام زاوية الميل

فعندما تكون $\overline{AB}$ مائلاً على(X) بحيث ان زاوية الميل تساوي θ ومسقطه هو $\overline{BC}$فان :

$$\boxed{BC = A.B.\cos\theta}$$

تعريف5- 8 مسقط مستوي مائل على مستوي معلوم

زاوية ميل مستوي على مستوي معلوم هي قياس الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية بينهما

مساحة مسقط منطقة مائلة على مستوٍ معلوم = مساحة المنطقة المائلة × جيب تمام زاوية الميل

لتكن A مساحة المنطقة المائلة ، A' مساحة المسقط ، θ قياس زاوية الميل فان : $\boxed{A' = A.\cos\theta}$

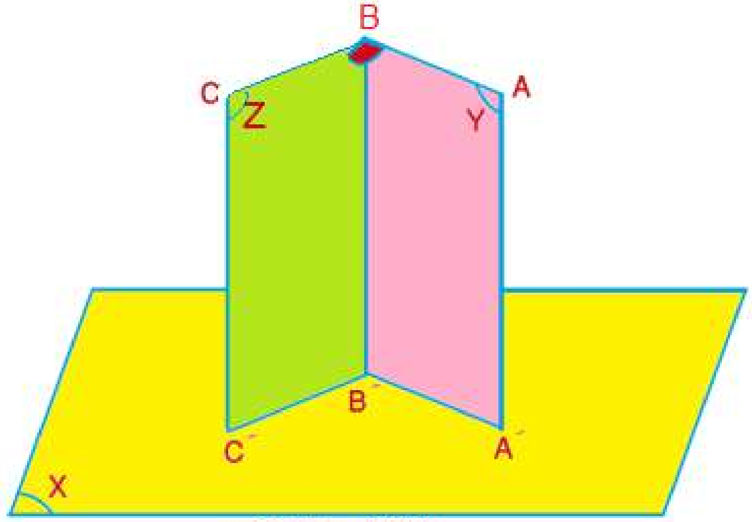
مثال 4):

اذا وازي احد ضلعي زاوية قائمة مستوياً معلوماً فان مسقطي ضلعيها على المستوي متعامدان. برهن ذلك

المعطيات : $\sphericalangle ABC$ قائمة في B ، $\overline{AB}//(X)$

$\overline{A'B'}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X) ، $\overline{B'C'}$ هو مسقط $\overline{BC}$ على (X)

المطلوب إثباته : $\overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$



الشكل 5-16

البرهان :

$\overline{A'B'}$هو مسقط $\bar{A}$ على (X)

$\overline{B'C'}$ هو مسقط $\overline{BC}$ على (X) معطى

$\therefore$ (X) $\perp$ $\overline{CC'},\overline{BB'},\overline{AA'}$ (مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم هوقطعة المستقيم المحددة باثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة المستقيمة على المستوي المعلوم)

$\therefore$ $\overline{BB'}//\ \overline{CC'}$ ، $\overline{AA'}//\ \overline{BB'}$ (المستقيمان العمودان على مستوي واحد متوازيان)

بالمستقيمين المتوازيين $\overline{AA'},\overline{BB'}$ نعين المستوي (Y) (لكل مستقيمين متوازيين يوجد

بالمستقيمين المتوازيين $\overline{BB'},\overline{CC'}$ نعين المستوي (Z) مستوي وحيد يحتويهما)

لكن $\overline{AB}//(X)$ (معطى)

$\overline{A'B'} = (X) \cap (Y)$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$\therefore \overline{AB} // \overline{A'B'}$ (اذا وازي مستقيم مستوياً معلوماً فانه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي والمستويات التي تحوي المستقيم)

كذلك $\overline{BB'} \perp \overline{A'B'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من أثره).

$\overline{AB} \perp \overline{BB'}$ (في المستوي الواحد المستقيم العمود على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الاخر)

لكن $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ (لأن $m\measuredangle ABC = 90°$ معطى)

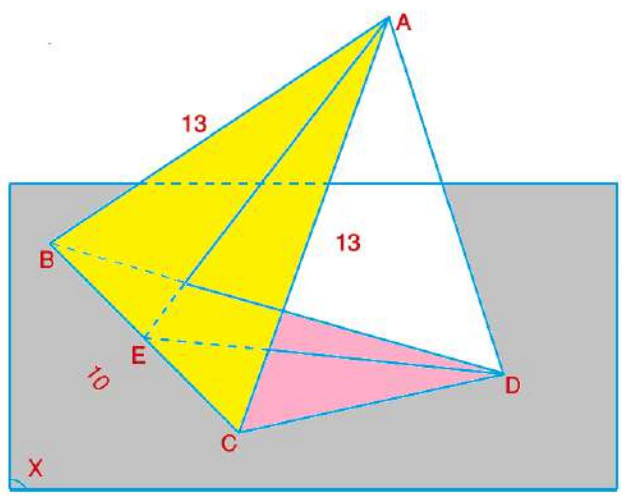
$\overline{AB} \perp (Z)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\therefore \overline{A'B'} \perp (Z)$ (المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الاخر).

$\therefore \overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من أثره).

و. هـ. م

مثال 5) : ABC مثلث ، $\overline{BC} \subseteq (X)$،الزاوية الزوجية بين مستوي المثلث ABC والمستوي (X) قياسها $60°$ فاذا كان: $\overline{AB} = \overline{AC} = 13$ cm $, \overline{BC} = 10\ cm$ ، جد مسقط مستـــوي المثلث (ABC) على المستوي (X) ثم جد مساحة هذا المسقط.



الشكل 5-17

المعطيات : المثلث ABC وفيه : $\overline{BC} \subseteq (X)$ ، $m[(\text{ABC}) - \overleftrightarrow{BC} - (X)] = 60°$

$$\overline{AB} = \overline{AC} = 13\ cm\ , \overline{BC} = 10\ cm$$

المطلوب إثباته : إيجاد مسقط ΔABC على المستوي (X) ومساحة هذا المسقط

الحل والبرهان : نرسم $\overline{AD}$ عمودياً على (X) من نقطة D(يمكن رسم مستقيم عمودي على مستوي من نقطة معلومة) .

$\therefore$ $\overline{CD}$مسقط $\overline{AC}$ على (X) ، $\therefore$ $\overline{BD}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) ، $\therefore$ $\overline{BC}$ مسقط نفسه على (X)(مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة باثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة).

$\therefore$ ΔBCD هو مسقط ΔABCعلى (X).

في (ABC) نرسم $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ في النقطة E

(في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم عمود على مستقيم اخرمن نقطة معلومة)

وبما ان $\overline{AB} = \overline{AC} = 13\ cm$ (معطى)

$\therefore$ $\overline{EC} = \overline{BE} = 5\ cm$ (العمود النازل من راس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها).

$\therefore$ $\overline{ED} \perp \overline{BC}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة).

$\therefore$ $\measuredangle DEA$ هي الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجيةالتي حرفها $\overline{BC}$(تعريف الزاوية الزوجية)

لكن قياس الزاوية الزوجية التي حرفها $\overline{BC}$ يساوي $60°$ (معطى).

في ΔAEB القائم في E :

$$\overline{AE} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12cm$$

في ΔAED القائم في D :

$$\cos 60° = \frac{\overline{ED}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{ED}}{12} \Rightarrow \overline{ED} = 6cm$$

و. هـ. م 1

أما مساحة المثلث BCD فهي :

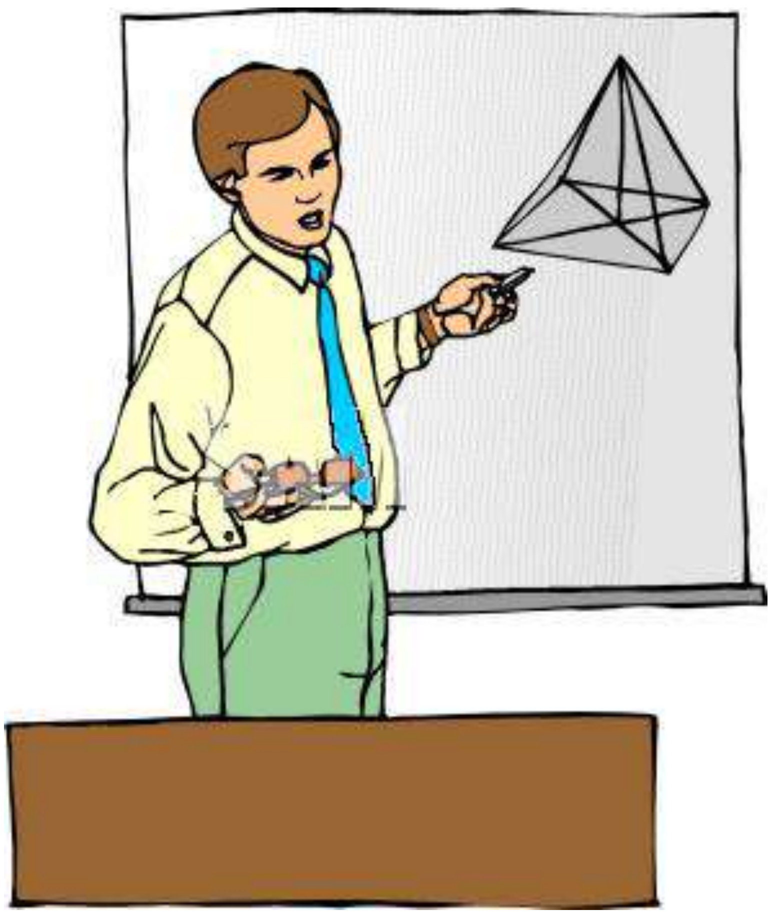
$$A = \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30cm^2$$ و. هـ. م 2

ملاحظة : لوكان المطلوب فقط مساحة المسقط BCD فان ايجاده يتم كما يأتي :

$A = ABC$مساحة المثلث $\times \cos 60° = \frac{1}{2}(12 \times 10) \times \frac{1}{2} = 30\ cm^2$

تمرين (5-2)

1. برهن ان طول قطعة المستقيم الذي يوازي مستوياً معلوماً يساوي طول مسقطه على المستوي المعلوم ويوازيه.
2. برهن انه اذا قطع مستويان متوازيان بمستقيم فان ميله على احدهما يساوي ميله على الأخر.
3. برهن ان للمستقيمات المتوازية المائلة على مستوٍ الميل نفسه.
4. برهن انه اذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي إلى مستوٍ معلوم فأن أطولهما تكون زاوية ميله على المستوي أصغر من زاوية ميل الآخر عليه.
5. برهن انه اذا رسم مائلان من نقطة ما لا تنتمي إلى مستوٍ فان اصغرهما ميلاً هو الأطول.
6. برهن ان زاوية الميل بين المستقيم ومسقطه على مستوٍ أصغر من الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه واي مستقيم اخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي .



الفصل السادس

نظرية الاحتمال Probability Theory

الأهداف السلوكية:

ينبغي للطالب في نهاية هذا الفصل ان يكون قادراً على ان: -

1. يتعرف على التعاريف الأساسية والمصطلحات المستخدمة في موضوع الاحتمال.
2. يتعرف على كيفية احتساب طرق وقوع الأحداث باستخدام التباديل والتوافيـــق .
3. يتعرف على عدد طرق سحب عينة من مجتمع ويميز بينها بالنسبة إلى تكـــرار وقوعها أو ترتيب حدوثها.
4. يتعرف على تعريف نسبة الاحتمال وخواصها والقوانين المستخدمة في حل المسائل المتعلقة بها.

المحتوى العلمي

1-6 تعاريف ومصطلحات

2-6 إيجاد طرق وقوع الأحداث باستخدام التباديل والتوافيق

3-6 عدد طرق سحب عينة من مجتمع مع الإرجاع وبدون الإرجاع وبالترتيب وبدونه.

4-6 نسبة الاحتمال .

الفصل السادس

Probability Theory نظرية الاحتمال

1-6 تعاريف ومصطلحات Definitions & Notations

تعريف 6-1 مفهوم الاحتمال The concept of probability

كثيراً ما تستخدم كلمة (احتمال) في حياتنا اليومية فعندما تقول انه من المحتمل ان يهطل المطر بعد قليل فذلك يعني ان هناك احتمال لهطول المطر بعد فترة وجيزة من الزمن على ضوء تقلبات معينة في الطقس. كذلك عندما يقول طبيب بالجراحة لذوي المريض ان احتمال نجاح العملية الجراحية هو 70% فان ذلك مستند إلى خبرة هذا الطبيب وظروف المريض.

تعريف 6-2 التجربة العشوائية Random Experiment

هي عملية معينة نستطيع التنبؤ بنتائجها ولكن لا نستطيع تحديد هذه النتائج مسبقاً على الرغم من انها معرفة بشروط معينة معلومة، ومن أمثلة ذلك: -

1. مباراة كرة قدم بين فريقين مختلفين.
2. إلقاء قطعة من النقود المعدنية مرة واحدة.
3. إلقاء حجر النرد (الزار) مرة واحدة.
4. إلقاء قطعتين من النقود المعدنية معاً.
5. إلقاء حجرين من أحجار النرد معاً.

تعريف 6−3 فضاء العيّنة Sample Space

هي مجموعة عناصرها جميع النواتج الممكنة الحدوث في التجربة العشوائية، ويرمز له بالرمز S كما يرمز لعدد العناصر بالرمز $n(S)$.

مثال 1): في تجربة إلقاء قطعة النقود المعدنية مرة واحدة، فأن: -

$$S = \{H, T\}$$
$$n(S) = 2$$

حيث H ترمز الى ظهور الوجه الذي يحمل الصورة، T ترمز إلى ظهور الوجه الذي يحمل الكتابة.

(ملاحظة: H: head , T: tell)

مثال 2): في تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة ، فأن فضاء العيّنة هو :

$$S = \{1, 2,3,4, ,5,6\}$$
$$n(S) = 6$$

تعريف 6-4 الحدث Event

هي مجموعة عناصرها بعض النواتج الممكنة الحدوث في التجربة العشوائية، أي انها مجموعة جزئية من فضاء العيَنة، ويرمز له بالرمز E.

مثال 3): في تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة، فأن فضاء العيّنة هو: -

$$S = \{1, 2,3,4,,5,,6\}$$

ولو قلنا انه في تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة حدث ان ظهر عدد زوجي من النقاط السود على الوجه الاعلى بعد استقرار حجر النرد على سطح المنضدة فان هذا الحدث يعبّر عنه بالصيغة الأتية: -

$$E = \{2,4,6\} \subset S$$

لاحظ انه يمكننا وصف أكثر من حدث في هذه التجربة العشوائية فمثلاً:

1. حدث ظهور عدد فردي من النقاط السود على الوجه الأعلى بعد استقرار حجر النرد على سطح المنضدة ويعبّر عنه بالصيغة الأتية: -

$$E = \{1,3,5\} \subset S$$

2. حدث ظهور عدد أولي من النقاط السود على الوجه الأعلى بعد استقرار حجر النرد على سطح المنضدة ويعبّر عنه بالصيغة الأتية: -

$$E = \{2,3,5\} \subset S$$

3. حدث ظهور عدد يقبل القسمة على 3 من النقاط السود على الوجه الأعلى بعد استقرار حجر النرد على سطح المنضدة ويعبّر عنه بالصيغة الأتية:

$$E = \{3,6\} \subset S$$

4. حدث ظهور عدد يقبل القسمة على 5 من النقاط السود على الوجه الأعلى بعد استقرار حجر النرد على سطح المنضدة ويعبّر عنه بالصيغة الأتية: -

$$E = \{5\} \subset S$$

تعريف 6-5 المحاولات والحوادث البسيطة Trials & Simple events

افرض ان هناك تجربة يمكن تكرارها تحت نفس الظروف المحددة لها. وان هناك عدد ممكن لهذه التجربة وان هذه التجربة سوف تنتهي بإحدى هذه النتائج عندئذ تسمى هذه التجربة محاولة (Trial) والنتائج الممكنة لهذه التجربة تسمى حوادث (events).

مثال 4): عند رمي قطعة نقود وملاحظة الوجه الذي سيظهر نحو الأعلى بعد استقرار القطعة واضح ان النتائج الممكنة لهذه التجربة هي صورة أو كتابة وعليه فان رمي قطعة مرة واحدة تسمى (محاولة) والنتيجة التي تظهر تسمى (حادثة بسيطة).

مثال 5): عند فحص قطرة دم شخص لأول مرة لغرض تحديد صنف الدم. واضح ان النتائج الممكنة لعملية الفحص هي الأصناف $O,\ AB, B, A$ وعليه ان عملية الفحص لدم هذا الشخص تسمى (محاولة) وإن أي نتيجة للاختبار تسمى (حادثة بسيطة).

تعريف 6−6 الحوادث ذات الفرص المتساوية (Equally Likely events)

يقال ان النتائج الممكنة لمحاولة تمتلك فرصاً متساوية إذا لم يكن هناك تفضيل نتيجة على أخرى على سبيل المثال عند رمي قطعة النقود عشوائياً فان ظهور الصورة أو الكتابة لهما نفس الفرصة للظهور كذلك عند فحص قطرة دم شخص لأول مرة فان لكل صنف نفس الفرصة في الظهور.

تعريف 6−7 الحوادث المتنافية (المتناقضة) (Mutually exclusive events)

هي الحوادث التي تمتاز بان وقوع أحداهما يمنع وقوع أي من الحوادث الأخرى لنفس المحاولة أي الذي نعنيه لا يمكن وقوع حادثتين أو أكثر في آن واحد لنفس المحاولة على سبيل المثال لا يمكن عند رمي قطعة نقود ظهور الصورة والكتابة في آن واحد.

مثال 6): في تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة :

أولاً) صف الاحداث الاتية

1) ظهور عدد أولي 2) ظهور عدد فردي 3) ظهورعدد زوجي

ثانياً) حدد الأحداث المتنافية الوارد ذكرها في أولاً.

الحل : أولاً) :

$$1)\ E_1 = \{2,3,5\}$$

$$2)\ E_2 = \{1,3,5\}$$

$$3)\ E_3 = \{2,4,6\}$$

ثانياً): ان الحدثين المتنافيان في أولاً هما :

$$E_2 = \{1,3,5\}, E_3 = \{2,4,6\}$$

لأن:

$$E_2 \cap E_3 = \varphi$$

بينما :

$$E_1 \cap E_2 = \{3,5\} \neq \varphi$$
$$E_1 \cap E_3 = \{2\} \neq \varphi$$

مثال 7): في تجربة اختيار وردتين عشوائياً من مزهرية فيها ورود حمراء وصفراء وبيضاء اللون

1) صف فضاء العّينة.

2) صف حدث كون الوردتين المسحوبتين من لون واحد

3) صف حدث كون الوردتين مختلفتين باللون

الحل:

1) $S =$ { كلاهما حمراء ،كلاهما بيضاء، كلاهما صفراء، حمراءوصفراء، حمراءوبيضاء، بيضاءوصفراء }

2) $E_1 =$ { كلاهما حمراء ،كلاهما بيضاء، كلاهما صفراء }

3) $E_2 =$ { حمراءوصفراء، حمراءوبيضاء، بيضاءوصفراء }

ومن الواضح ان الحدثين E_1, E_2 هما حدثان متنافيان(منفصلان) لكون تقاطعهما مجموعة خالية.

مثال 8) : صف فيه طلاب من سوريا ومصر والجزائر. يراد اختيار ثلاثة منهم للمشاركة في مهرجان رياضي ، صف ما يأتي :

1) الحدث (الطلاب المختارون من نفس البلد)

2) الحدث (اختيار طالب مصري واحد على الأقل)

3) الحدث (اختيار طالب سوري واحد على الأكثر)

4) الحدث (اختيار أربعة طلاب من نفس البلد)

الحل : 1) $E_1 =$ { الثلاثة سوريون ، الثلاثة مصريون ، الثلاثة جزائريون }

2) $E_2 =$ { سوريان ومصري ، جزائريان ومصري ، جزائري وسوري ومصري، مصريان وجزائري ، مصريان وسوري ، مصريون الثلاثة }

3) $E_3 =$ { جزائريان وسوري ، مصريان وسوري ، جزائري وسوري ومصري ، الثلاثة جزائريون، الثلاثة مصريون ، جزائريان ومصري ، مصريان وجزائري }

4) هذا الحدث مستحيل أي ان المجموعة التي تمثله مجموعة خالية φ.

ملاحظة : أذا كانت التجربة العشوائية مكونة من تجربتين فرعيتين متتاليتين وكان فضاء العيّنة للتجربة الفرعية الأولى S_1 وللثانية S_2 فأن :

1) فضاء العيّنة S للتجربة المركبة يساوي حاصل الضرب الديكارتي لـ S_1 و S_2.

2) $$n(S) = n(S_1) \times n(S_2)$$

مثال 9): في تجربة إلقاء حجر نرد ثم قطعة نقود معدنية. تذّكر ان فضاء العيّنة لتجربة إلقاء حجر النرد هو $S_1 = \{1, 2,3,4,5,6\}$ وأن: $n(S_1) = 6$ ، كما ان فضاء العيّنة لتجربة إلقاء العملة النقدية المعدنية هو $_2 = \{H, T\}$

وأن: $n(\ _2) = 2$.

وعليه يكون فضاء العيّنة للتجربة المركبة هو :

$$S = \left\{ \begin{matrix} (1, H), (2, H), (3, H), (4, H), (5, H), (6, H) \\ , (1, T), (2, T), (3, T), (4, T), (5, T), (6, T) \end{matrix} \right\}$$

وهو فعلاً حاصل الضرب الديكارتي لفضائي العيّنة ، أما عدد عناصره فهو : $n = 12$

تمرين (1-6)

1. صف فضاء العيّنة وحدد عدد عناصره لكل من التجارب العشوائية الأتية :

a) تجربة إلقاء عملتين نقديتين معدنيتين معاً.

b) تجربة إلقاء حجري نرد معاً.

c) تجربة إلقاء عملة نقدية معدنية ثم حجر نرد ثم عملة نقدية ثانية.

d) اختيار قطعتين من مكتبة تحتوي صحفاً وكتباً ومجلات.

e) اختيار ثلاثة أشخاص من غرفة يقطنها رجال ونساء.

2. القينا ثلاث قطع نقدية معدنية مرة واحدة ، صف

a) فضاء العيّنة وحدد عدد عناصره.

b) الحدث (وجهان كتابة ووجه واحد صورة)

c) الحدث (وجه واحد على الأقل كتابة)

d) الحدث (وجه واحد على الأكثر كتابة)

e) الحدث (أربعة أوجه كتابة)

3. في تجربة إلقاء حجري نرد معاً:

a) أكتب فضاء العيّنة وحدد عدد عناصره .

b) صف حدث ظهور عددين مجموعهما 8 على الوجهين العلويين للحجرين بعد استقرارهما على سطح المنضدة.

c) صف الحدث الذي يكون فيه العدد على احد الوجهين العلويين ضعف العدد على الوجه العلوي الأخر.

d) صف الحدث الذي يكون فيه العددان على الوجهين العلويين للحجرين متساويين.

4. في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية وحجر نرد معاً ، صف :

a) فضاء العيّنة وحدد عدد عناصره

b) الحدث (ظهور صورة وعدد أولي).

c) الحدث (ظهور كتابة وعدد زوجي).

d) الحدث (ظهور صورة وعدد فردي).

2-6 إيجاد عدد طرق وقوع الأحداث باستخدام التباديل والتوافيق

كنّا قد درسنا في الصف الثاني طرائق العد (Counting Methods) وتعرفنا على مبدأ العد الأساسي (Fundamental Counting Principle) الذي تتضمنه العبارة الأولية الأتية :

عبارة أولية :

أذا كان لدينا عدد (K) من العمليات (أو الاختيارات) وكان بالإمكان إجراء العملية الأولى بعدد من الطرق مقداره (m) ، وكان بالإمكان إجراء العملية الثانية بعدد من الطرق مقداره (n) ، وكان بالإمكان إجراء العملية من الرتبة (K) بعدد من الطرق مقداره (z) ، بحيث ان إجراء أي عملية لا يؤثر على إجراء أي من العمليات الأخرى فان عدد الطرق التي يمكن إجراء كل تلك العمليات مجتمعة يساوي $m \times n \times ... \times z$

كما تعرفنا على مفهوم مضروب العدد الصحيح (Factorial of Integer Number) من خلال التعريف الاتي :

تعريف : مضروب العدد الصحيح :

1) $n! = n.(n-1).(n-2)\ldots 1 \qquad n \in \mathbb{Z}^+ : n \geq 2$

2) $1! = 1$

3) $0! = 1$

ملاحظة :

$$\boxed{n! = n.(n-1)!}$$

كما أننا تناولنا بالتفصيل مفهوم التباديل (Permutation) وكما يأتي :

تعريف : التباديل

ليكن $n, r \in \mathbb{Z}^+$ بحيث $n \geq r$:

$$P_r^n = P(n,r) = \begin{cases} n! & ; r = n \\ n.(n-1).(n-2)\ldots(n-r+1) & ; r < n \\ 1 & ; r = 0 \end{cases}$$

ملاحظة :

$$\boxed{P_r^n = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

وكذلك كنّا قد تناولنا مفهوم التوافيق (Combination) وكما يأتي:

تعريف التوافيق :

ليكن $n, r \in \mathbb{Z}^+$ بحيث $n \geq r$:

$$c_r^n = c(n,r) = \binom{n}{r} = \begin{cases} \frac{p(n,r)}{r!} & ; r < n \\ 1 & ; r = 0 \\ 1 & ; r = n \end{cases}$$

ملاحظات :

1) $C(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$

2) $C(n,r) = C(n, n-r)$

ولكي ننشط لك ذاكرتك عزيزي الطالب سوف نتناول بعض الأمثلة حول ما سبق :

مثال 10): بكم طريقة يمكن ترتيب جلوس 6 أشخاص حول مائدة مستديرة بحيث يجلس شخصان محددان الواحد بجوار الأخر دوماً ؟

الحل : نطلب من الشخصين المطلوب جلوسهما متجاورين دائماً الجلوس على أي كرسيين حول المائدة المستديرة وذلك يتم بطريقتين تبعاً لمن يجلس إلى يمين الأخر لأن :

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

أما الأشخاص الأربعة المتبقين فانه يمكن ترتيب جلوسهم بـ 24 طريقة لأن:

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

وبذلك تكون عدد الطرق الكلية للجلوس هي :

$$24 \times 2 = 48 \text{ طريقة}$$

مثال 11): في أحد الامتحانات توجب على الطالب ان يجيب على ثمانيـــة أسئلة مـــن أصل عشرة أسئلة:

1) بكم طريقة يمكن للطالب اختيار الأسئلة التي سيجيب عنها ؟
2) بكم طريقة يمكن للطالب اختيار الأسئلة التي سيجيب عنها ان كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية ؟
3) بكم طريقة يمكن للطالب اختيار الأسئلة التي سيجيب عنها اذا اشترط الإجابة عن أربعة أسئلة من الأسئلة الخمسة الأولى ؟

الحل : في البداية لا بد من التذكير ان الترتيب في مثالنا هذا غير مهم (إذ لا يشترط مثلاً ان يقوم الطالب بحل الأسئلة بالتسلسل الذي وردت فيه في ورقة الأسئلة).

$$1)\ C_8^{10} = \frac{p(10,8)}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{10 \times 9}{2} = 45 \text{ طريقة}$$

وعندما تكون الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية فهذا يعني ان بإمكان الطالب اختيار خمسة أسئلة من الاسئلة السبعة الباقية ، أي

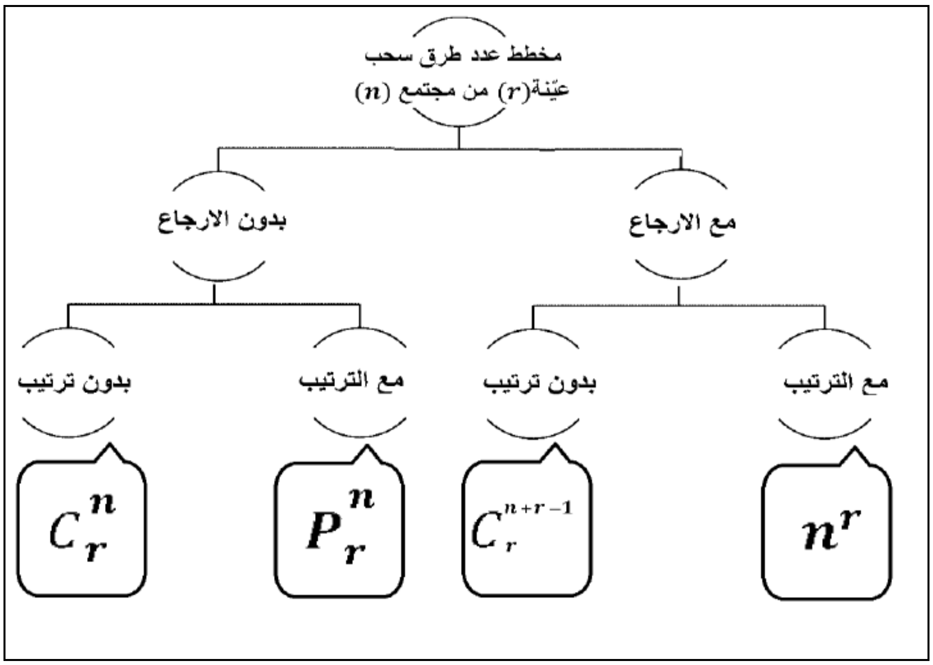
$$2)\ C_5^7 = \frac{p(7,5)}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7 \times 6}{2} = 21 \text{ طريقة}$$

أما الشرط الوارد بالفرع (3) من المثال فان اختيار أربعة أسئلة من من الأسئلة الخمسة الأولى يتم بـ C_4^5 طريقة ، والاسئلة الاربعة المتبقية للإجابة عنها يتم اختيارها من الأسئلة الخمسة الأخيرة وذلك يتم بـ C_4^5 طريقة ، ولذلك يكون عدد الطرق الكلية هو:

$$C_4^5 \times C_4^5 = 25 \text{ طريقة}$$

3-6 عدد طرق سحب عينة من مجتمع مع الإرجاع وبدون الإرجاع وبالترتيب وبدونه

لا بد لنا من التطرق إلى مفهومي (السحب بالإرجاع) و(السحب بدون إرجاع). ان المقصود بـ (السحب بالإرجاع) هو أن كل عيّنة يتم سحبها من المجتمع تعاد اليه قبل الشروع بسحب عيّنة أخرى، وبالتالي فان عدد عناصر المجتمع يبقى ثابتاً في جميع الأحوال. أما (السحب بدون إرجاع) فيقصد به ان كل عيّنة يتم سحبها من المجتمع لاتعاد مرة أخرى إلى المجموعة الأصلية قبل إجراء السحبة التالية ، وبالتالي فأن عدد عناصر المجتمع يتناقص بعد إجراء كل سحبة بمقدار العدد المسحوب منه.



ملاحظة مهمة :

إن لم تذكر طريقة السحب في السؤال فيعتبر السحب دون إرجاع ودون ترتيب

مثال 12): وعاء يحتوي 7 كرات مرقمة من 1 إلى 7 أحسب عدد طرق سحب كرتين ثم 3 كرات ثم كرتين (دون إرجاع ودون ترتيب).

الحل : لاحظ ان السحب دون إرجاع أي ان عدد عناصر المجتمع عند أول سحبة كان 7 وعند السحبة الثانية تبقى 5 كرات يراد سحب 3 منها بدون إرجاع أيضا فلا يتبقى ســـــوى كرتين يراد سحبهما أيضا. وعليه فان عدد الطرق هو :

$$C_2^7 \times C_3^5 \times C_2^2 = 210$$ طريقة

مثال 13): بكم طريقة يمكن توزيع 3جوائز مختلفة بين 10 طلاب ان كان بالإمكان ان يفوز بها جميعاً طالب واحد (السحب مع الترتيب والإرجاع) ؟

الحل : $n^r = 10^3 = 1000$ طريقة

مثال 14): بكم طريقة يمكن توزيع 3جوائز مختلفة بين 10 طلاب ان لم يكن ممكناً ان يفوز بها جميعاً طالب واحد (السحب مع الترتيب وبدون إرجاع) ؟

الحل : $\mathrm{P}_r^n = \mathrm{P}_3^{10} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ طريقة

مثال 15): بكم طريقة يمكن تكوين شفرة رمزية ذات 4 حروف من حروف اللغــة العربية ان كان التكرار مسموح به (السحب مع الترتيب والإرجاع) ؟

الحل : بما ان عدد حروف اللغة العربية هو 28 لذلك تكون عدد طرق السحب كالاتي:

$n^r = 28^4 = 614656$ طريقة

مثال 16): بكم طريقة يمكن اختيار رواية واحدة ومجلة واحدة وجريدة واحدة من مكتبة تحتوي 12 رواية و 5 مجلات و8 جرائد ؟

الحل : حيث انه لم تذكر طريقة السحب في السؤال فيعتبر السحب دون إرجاع ودون ترتيب

$\mathrm{C}_1^{12} \times \mathrm{C}_1^5 \times \mathrm{C}_1^8 = 12 \times 5 \times 8 = 480$ طريقة

مثال 17): بكم طريقة يمكن توزيع 9 ألعاب على 4 أطفال بحيث يتلقى الطفل الاصغر3 ألعاب ولكل طفل آخر لعبتان فقط ؟

الحل : حيث انه لم تذكر طريقة السحب في السؤال فيعتبر السحب دون إرجاع ودون ترتيـــب

$\mathrm{C}_3^9 \times \mathrm{C}_2^6 \times \mathrm{C}_2^4 \times \mathrm{C}_2^2 = 7560$ طريقة

مثال 18): سحبت ورقتين بصورة عشوائية من بين 10 ورقات مرقمة من 1الى 10 جد عدد طرق ظهور مجموع فردي في الحالتين الاتيتين :

a) السحب مع الترتيب والإرجاع .

b) السحب بدون ترتيب لكن مع الإرجاع.

الحل : a) حيث انه توجد 5 أرقام فردية و5 أرقام زوجية وان المجموع الفردي يمكن الحصول عليه فقط من جمع رقمين احدهما فردي والأخر زوجي لذلك يمكن حساب عدد طرق الوقوع باستخدام القانون n^r لكون السحب مع الترتيب والإرجاع اي $5^2 = 25$

b) يمكن حساب عدد طرق الوقوع باستخدام القانون C_n^{n+r-1} لكون السحب بدون ترتيب لكن مع الإرجاع أي :

$$C_2^{5+1-1} \times C_2^{5+1-1} = C_1^5 \times C_1^5 = 5 \times 5 = 25$$

لاحظ ان النتيجة واحدة في كلا الحالتين بسبب كون سحب لورقة واحدة فقط من كل من مجموعتي الاوراق (الفردية والزوجية) وبذلك لا يصبح هنالك أي معنى للترتيب والارجاع.

تمرين (6-2)

1. من مجموعة 8 رجال و 6 سيدات يراد تأليف لجنة خماسية
   a) بكم طريقة يتم ذلك (أي عدد الطرق الكلية) ؟
   b) بكم طريقة يمكن ان تحتوي اللجنة على 3 رجال فقط ؟
   c) بكم طريقة يمكن ان يكون أعضاء اللجنة من جنس واحد ؟
   d) بكم طريقة يمكن ان تحتوي اللجنة 3 رجال على الأقل ؟
   e) بكم طريقة يمكن ان تحتوي اللجنة على 3 رجال على الأكثر ؟
   f) بكم طريقة يمكن ان تحتوي اللجنة على الأقل 2 رجال وعلى الأقل 2 نساء ؟
2. اختيرت بذرتين عشوائياً لنبات مزهر من كيس يحتوي 10 بذور زهورها حمراء اللون و 5 بذور زهورها بيضاء اللون ، جد عدد طرق وقوع الأحداث الأتية :
   a) ان تكون البذرتان تعطي زهوراً بيضاء اللون.
   b) ان تكون إحداهما تعطي زهوراً حمراء اللون والأخرى تعطي زهوراً بيضاء اللون.
   c) ان تكون البذرتان تعطي زهوراً من لون واحد.
3. سحبت ورقة عشوائياً من بين 50 ورقة مرقمة من1إلى50جد عدد طرق وقوع الأحداث الأتية :
   a) ظهور عدد يقبل القسمة على 5
   b) ظهور عدد يقبل القسمة على 7
   c) ظهور عدد يقبل القسمة على 5 و 7 في الوقت ذاته
   d) ظهور عدد آحاده الرقم 2
   e) ظهور عدد أولي
4. اختير الطلبة في صف دراسي بشكل عشوائي لأجراء اختبار تنافسي واحداً تلو الأخر. جد عـــدد الطرق التي يمكن الاختيار بموجبها ليكون دخول الطلاب إلى لجنة الاختبار متعاقباً (ذكر ثم أنثى أو بالعكس) في الحالات الأتية :
   a) الصف فيه 4 طلاب و 3 طالبات.
   b) الصف فيه 3 طلاب و3 طالبات.

4-6 نسبة الاحتمال (Probability ratio)

في تجربة معيّنة أذا كان عدد طرق وقوع حدث ما وليكن E هو r من مجموع عدد الطرق الكلية للتجربة والتي عددها n فأن احتمال وقوع الحدث E ويرمز له بالرمز $P(E)$ يعبر عنه كالاتي :

$$\boxed{P(E) = \frac{r}{n}}$$

مثال 19): جد نسبة احتمال ظهور عدد زوجي أولي في تجربة رمي حجر النرد.

الحل :

ان عدد عناصر فضاء العيّنة لهذه التجربة هو 6 ، وان العدد 2 هو العدد الوحيد الذي له صفتي (زوجي وأولي) وهكذا تكون : $n = 6,\ r = 1$ وبذلك تكون :

$$P(E) = \frac{r}{n} = \frac{1}{6}$$

تعريف 6-5 الحدثان المستقلان

هما الحدثان E_1, E_2 اللذان يقعان معاً أو بالتتابع في تجربة عشوائية دون ان يؤثر وقوع أحدهما على الأخر ويحققان العلاقة الأتية: $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1).P(E_2)$

1-4-6 قوانين نسبة الاحتمال

ليكن كل من A, B حدثين مختلفين في تجربة عشوائية فضاء العيّنة لها هو S فأن :

1) $0 \le P(\mathrm{A}) \le 1$ حيث:

a) عندما يكون A حدثاً مستحيلاً أي $\mathrm{A} = \varphi$ فان $P(\mathrm{A}) = 0$

b) عندما يكون A حدثاً مؤكداً أي $\mathrm{A} = S$ فان $P(\mathrm{A}) = 1$

أي ان نسبة الاحتمال لأي حدث تنتمي للفترة المغلقة [0,1] ضمن مجموعة الأعداد الحقيقية.

2) أذا كان كل من A, B حدثين مستقلين فأن: -

$$P(\mathrm{A} \cap B) = P(\mathrm{A}).P(B)$$

3) لكل حدثين A, B يكون: $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

4) أذا كان كل من A, B حدثين منفصلين (متنافيين) فأن: -

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})$$

وذلك لأن: $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \varphi \ \Rightarrow P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$

5) إذا كان A^c هو الحدث المتمم للحدث A فان: -

$$P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{A}^c) = 1$$

ملاحظة: في موضوع نسبة الاحتمال تعني أداة العطف (أو) عملية الاتحاد $\cup$ بينما تعني اداة العطف (و) عملية التقاطع $\cap$

مثال 20): اذا كانت نسبة احتمال نجاح تجربة اطلاق قمر صناعي إلى الفضاء هي 90%
فما نسبة احتمال فشل التجربة ؟

الحل: فضاء العيّنة لهذه التجربة هو:{الفشل ، النجاح } وحيث ان الحدثين {الفشل} و{النجاح}
حدثان متتامان لذلك يكون :

$$\because P(\text{A}) + P(\text{A}^c) = 1$$

$$\therefore 0.90 + P(\text{A}^c) = 1$$

$$P(\text{A}^c) = 1 - 0.90 = 0.10$$

أي ان نسبة احتمال فشل التجربة هو 10%

مثال 21): ثلاث سيارات C, B, A مشتركة في سباق سيارات فاذا كان احتمال فوز
السيارة (A) هو ضعف احتمال فوز السيارة (B) وكان احتمال فوز السيــارة
(B) هو ضعف احتمال فوز السيارة (C) فما هو احتمال فوزكل من السيارات
الثلاث ؟

الحل : نفرض نسبة احتمال فوز السيارة C بالمسابقة هي x
فتكون نسبة احتمال فوز السيارة B بالمسابقة هي $2x$
وتكون نسبة احتمال فوز السيارة A بالمسابقة هي $4x$
وبما ان : $P(S) = 1$

$$\therefore x + 2x + 4x = 1$$

$$\therefore 7x = 1$$

نسبة احتمال فوز السيارة C بالمسابقة $x = \frac{1}{7}$

نسبة احتمال فوز السيارة B بالمسابقة $2x = \frac{2}{7}$

نسبة احتمال فوز السيارة A بالمسابقة $4x = \frac{4}{7}$

مثال 22): صنع حجر نرد ليكون احتمال ظـــهورالعدد في الرمية الواحدة متناسباً مع
العدد نفسه (أي ان احتمال ظهورالعدد 6 مثلاً ضعف احتمال ظهورالعدد 3).

a) صف فضاء العيّنة وجد احتمال حدوث كل عنصر فيه.

b) أذا كان A حدث ظهور عدد زوجي وB حدث ظهور عدد فردي وC حدث
ظهورعدد أولي جد $P(\text{A}), P(\text{B}), P(\text{C})$.

c) جد احتمال 1) ظهور عدد أولي أو عدد زوجي أي $P(C \cup A)$
2) ظهور عدد أولي وفردي في نفس الوقت أي $P(\text{C} \cap B)$.

الحل:

a) حيث ان $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

نفرض ان x هي نسبة احتمال ظهور العدد (1) فيكون:

$2x$ هي نسبة احتمال ظهور العدد (2)

$3x$ هي نسبة احتمال ظهور العدد (3)

$4x$ هي نسبة احتمال ظهور العدد (4)

$5x$ هي نسبة احتمال ظهور العدد (5)

$6x$ هي نسبة احتمال ظهور العدد (6)

وبما ان : $P(S) = 1$

$$\therefore x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1 \Rightarrow 21x = 1$$

نسبة احتمال ظهور العدد(1) $x = \frac{1}{21}$

نسبة احتمال ظهور العدد(2) $2x = \frac{2}{21}$

نسبة احتمال ظهور العدد(3) $3x = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

نسبة احتمال ظهور العدد(4) $4x = \frac{4}{21}$

نسبة احتمال ظهور العدد(5) $5x = \frac{5}{21}$

نسبة احتمال ظهور العدد(6) $6x = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

b) $A = \{2,4,6\}, B = \{1,3,5\}, C = \{2,3,5\}$

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6)$$

$$= \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

$$P(B) = P(1) + P(3) + P(5)$$

$$= \frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

$$P(C) = P(2) + P(3) + P(5)$$

$$= \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} = \frac{10}{21}$$

c)   1) حيث ان الأحداث ليست متنافية

$$P(C\cap A)=P[\{2,3,5\}\cap\{2,4,6\}]=P\{2\}=\frac{2}{21}$$

$$P(C\cup A)=P(C)+P(A)-P(C\cap A)$$

$$=\frac{10}{21}+\frac{12}{21}-\frac{2}{21}=\frac{20}{21}$$

2) المطلوب $P(\,C\cap B)$

$$P(\,C\cap B)=P[\{2,3,5\}\cap\{1,3,5\}]$$

$$=P[\{3,5\}]=P(3)+P(5)=\frac{3}{21}+\frac{5}{21}=\frac{8}{21}$$

مثال 23): صف دراسي فيه 10 طلاب و20 طالبة. كان نصف الطلاب ونصف الطالبات يستخدمون اليد اليسرى للكتابة. اختير شخص واحد عشوائياً ، جد نسبة احتمال ان يكون هذا الشخص (طالباً ذكراً) أو (شخصاً يستخدم اليد اليسرى للكتابة بغض النظر عن الجنس).

الحل :

ليكن A حدث كون الطالب المختار طالباً ذكراً

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{C_1^{10}}{C_1^{30}}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

ليكن B حدث كون الطالب المختار شخصاً يستخدم اليد اليسرى للكتابة بغض النظر عن الجنس وحيث انه يوجد 5 طلاب يستخدمون اليد اليسرى للكتابة و10 طالبات يستخدمن اليد اليسرى للكتابة فعندما نغض النظر عن الجنس نستنتج انه يوجد 15 شخصاً يستخدم اليد اليسرى للكتابة.

$$P(B)=\frac{r}{n}=\frac{C_1^{15}}{C_1^{30}}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$$

وحيث ان A,B أحداث ليست متنافية لا بد من إيجاد $P(A\cap B)$ وهي احتمالية كون الشخص المختار ذكراً يستخدم اليد اليسرى للكتابة

$$P(A\cap B)=\frac{C_1^{5}}{C_1^{30}}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$$

المطلوب هو : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$P(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

مثال 24): أجريت إحصائية في أحد المطارات على 50 شخصاً تم اختيارهم عشوائياً فظهر ان 20 منهم ذكور و30 إناث وكان 5 من الذكور و12 من الاناث لهم عيون زرقاء اللون. تم اختيار شخصين عشوائياً ، جد نسبة احتمال ان يكون الشخصان المختاران من ذوي العيون الزرقاء اللون (بغض النظــر عن الجنس) أو ذكر بعيون زرقاء اللون أو أنثى بعيون ليست زرقاء اللون.

الحل:

ليكن A حدث كون الشخصين المختارين من ذوي العيون الزرقاء اللون(بغض النظر عـن الجنس). وحيث ان عدد الأشخاص من ذوي العيون الزرقاء اللون هو 17 شخص (بغض النظرعن الجنس)

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{C_2^{17}}{C_2^{50}}=\frac{272}{2450}=\frac{136}{1225}$$

ليكن B حدث كون الشخصين المختارين ذكر بعيون زرقاء اللون(1من 5) أو أنثى بعيون ليست زرقاء اللون (1من18)

$$P(B)=\frac{r}{n}=\frac{C_1^5\times C_1^{18}}{C_2^{50}}=\frac{5\times 18}{\frac{50\times 49}{2\times 1}}=\frac{180}{2450}=\frac{18}{245}$$

وحيث ان A,B أحداث متنافية نستخدم القانون $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$$=\frac{136}{1225}+\frac{18}{245}=\frac{226}{1225}$$

مثال 25): صندوق يحتوي 17 بالون مرقمة من 1 إلى 17 فاذا سحبنا أول بالون ثم سحبنا بالوناً ثانياً دون إعادة البالون الأول. جد نسبة احتمـــال ان يكون البالونين المسحوبين يحملان ارقاماً فردية إذا علمت ان الحدثين مستقلان.

الحل: يوجد في الصندوق (9) بالونات تحمل أرقاما فردية و(8) بالونات تحمل أرقامــا زوجية . ليكن A حدث كون أول بالون تم سحبه يحمل رقماً فردياً لذلك فان:

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{C_1^9}{C_1^{17}}=\frac{9}{17}$$

وليكن B حدث كون البالون الثاني الذي تم سحبه يحمل رقماً فردياً أيضاً ونظراً لكون السحب دون إرجاع فان عدد البالونات الفردية قد تناقص بمقداربالون واحد

وكذلك الأمر بالنسبة للعدد الكلي للبالونات لذلك يكون :

$$P(B)=\frac{r}{n}=\frac{C_1^8}{C_1^{16}}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

وحيث ان الحدثين مستقلان يكون:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

$$=\left(\frac{9}{17}\right).\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{34}$$

مثال 26): صحن فاكهة فيه 7 تفاحات و3 رمانات و5 برتقالات. أكلت 3 قطع منها عشوائياً الواحدة تلو الأخرى جد نسبة احتمال كونك تناولت فاكهة من كل نوع اذا علمت ان هذه الأحداث مستقلة.

الحل :

ليكن A حدث كون أول فاكهة تناولتها هي تفاحة

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{C_1^7}{C_1^{15}}=\frac{7}{15}$$

ليكن B حدث كون ثاني فاكهة تناولتها هي رمانة (لاحظ ان السحب بدون إرجاع)

$$P(B)=\frac{r}{n}=\frac{C_1^3}{C_1^{14}}=\frac{3}{14}$$

ليكن C حدث كون ثالث فاكهة تناولتها هي برتقالة (لاحظ ان السحب بدون إرجاع)

$$P(C)=\frac{r}{n}=\frac{C_1^5}{C_1^{13}}=\frac{5}{13}$$

$$P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)$$

$$=\left(\frac{7}{15}\right).\left(\frac{3}{14}\right).\left(\frac{5}{13}\right)$$

$$=\frac{1}{26}$$

تمرين (6-3)

1. صنع حجر نرد بحيث يكون احتمال ظهور الأعداد الزوجية متساوياً واحتمال ظهور الأعداد الفردية متساوياً أيضاً واحتمال ظهور اي عدد زوجي ضعف احتمال ظهوراي عدد فردي جد نسبة احتمال حدوث الاحداث الاتية :

a) ظهور عدد زوجي   b) ظهور عدد فردي   c) ظهور عدد أولي   d) ظهور عدد فردي أولي

2. صندوق فيه 12 مصباحاً كهربائياً من بينها 4 مصابيح عاطلة. سحبنا مصباحين من الصندوق جد نسبة احتمال كون : a) المصباحين المسحوبين كلاهما عاطل

b) المصباحين المسحوبين كلاهما صالح

c) المصباحين المسحوبين احدهما عاطل

3. يقف 12 شخص (6 رجال وزوجاتهم) في قاعة ما.

a) اذا أخترنا أثنين منهم عشوائياً ما نسبة احتمال ان يكونا (رجل وزوجته).

b) أذا أخترنا أربعة منهم عشوائياً ما نسبة احتمال ان يكونا (رجلين وزوجتيهما).

4. صف دراسي فيه 4 اردنيون و8 عراقيون و5 ليبيون و3 خليجيون. اخترنا طالبين معاً بصورة عشوائية ما نسبة احتمال:

a) الطالبين من بلد واحد   b) الطالبين (عراقي واردني) أو (ليبي واردني).

5. أذا كان كل من A, B حدثين منفصلين وكان احتمال حدوث A يساوي 0.3 واحتمال حدوث أحدهما على الأقل يساوي 0.7 فما نسبة احتمال حدوث الحدث B.

6. اختير رقمين من بين الأرقام 1 إلى 9 بطريقة عشوائية، فاذا كان مجموع الرقمين زوجياً ما نسبة احتمال ان يكون كل من الرقمين المختارين فردياً.

7. وعاء به 7 كرات حمراء اللون و3 كرات بيضاء اللون. اختيرت ثلاث كرات من الوعاء الواحدة بعد الأخرى دون إرجاع الكرات بعد اختيارها ما نسبة احتمال ان تكون الكرتان الأولى والثانية حمراء اللون والثالثة بيضاء اللون؟

8. ألقينا حجري نرد فكان العددان الظاهران مختلفين ما نسبة احتمال ان يكون :

a) المجموع 6   b) العدد على احد الأوجه هو العدد 1   c) المجموع 4 أو اقل